Boletín 0 de Cálculo

o *"algunas cosas que tengo que saber perfectamente"*

1. ¿Son ciertas las siguientes igualdades:

$$\frac{1}{3^2+2} = 0.091 \qquad \frac{\pi}{3} = 1.0472?$$

   Si no son iguales, ¿cuál es la expresión más correcta en cada caso?

2. Calcula o simplifica cuando sea posible

   a) $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$, b) $\dfrac{5+\frac{8}{3}}{\frac{\frac{7}{5}+1}{\frac{5}{2}}-2}$, c) $\dfrac{5^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{5}}$, d) $3^{\frac{3}{2}}\sqrt{3}$, e) $3^{\frac{3}{2}}3^{\frac{1}{2}}$,

   f) $\ln(e)$, g) $\ln\left(e^2\right)$, h) $\ln(0)$, i) $\ln\left(-1\right)$,

   j) e^0, k) e^{-1}, l) $e^{\ln(1)}$, m) $e^{\ln(e)}$,

   n) $3^{\frac{3}{2}}+3^{\frac{1}{2}}$, ñ) $\dfrac{\ln(5x)}{\ln\left(\frac{5}{x}\right)}$, o) $\dfrac{\ln(5+x)}{\ln(5-x)}$, p) $\ln(e^2)e^{\ln(5+x)-\ln(5x)}$,

   q) $\ln\sqrt{2^3}$, r) $\ln\left(\dfrac{x^2-1}{x^3}\right)^3$.

3. Calcula los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)$, b) $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)$, c) $\lim\limits_{x\to e}\ln(x)$, d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(x)$,

   e) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x$, f) $\lim\limits_{x\to0}e^x$, g) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x$, h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x}$,

   i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}$, j) $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}$, k) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x}$, l) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$,

   m) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, n) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2$, o) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2$, p) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-5x^2+8\right)$.

4. Racionaliza

   a) $\dfrac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x-3}}$, b) $\dfrac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x}-3}$, c) $\dfrac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x}+3}$.

5. ¿Cuáles de las siguientes funciones son polinomios?

   a) $f_1(x) = x^{\frac{2}{3}}+6x^{-3}$ b) $f_2(x) = x^{\frac{2}{3}}-6x^3$

   c) $f_3(x) = \dfrac{x^4+6x^3}{x^2+6x-7}$ d) $f_4(x) = x^4+6x^3$

6. Calcula la inversa de las siguientes funciones.

a) $f_1(x) = x^3$ b) $f_2(x) = x^3 + 1$ c) $f_3(x) = \frac{1}{5} + e^x$
d) $f_4(x) = \tan(x)$ e) $f_5(x) = \arctan(x)$

7. El siguiente conjunto de puntos $A = \{x \in \mathbb{R} \;/\; 3x - 5 < 7\}$, es

a) $A = (4, +\infty)$, b) $A = (-\infty, 4)$,
c) $A = (0, 4)$, d) $A = (-\infty, 12)$.

8. Calcula los siguientes conjuntos de puntos

a) $B = \left\{x \in \mathbb{R}/x^2 - 3x + 2 > 6\right\}$,

b) $C = \left\{x \in \mathbb{R}/3x - 5 < 7 \quad \text{y} \quad x^2 - 3x + 2 > 6\right\}$.

9. ¿Cuál es la relación entre los ángulos 45^o y π radianes? ¿Cuánto vale en radianes 30^o?
Los ángulos se darán **SIEMPRE** en $\boxed{\textit{grados}}$ $\boxed{\textit{radianes}}$ (márquese la que proceda). PISTA: Empieza por "r".

10. Completa la siguiente tabla con los valores correspondientes

Ángulo	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Seno								
Coseno								
Tangente								
Cotangente								
Secante								
Cosecante								

11. Simplifica las siguientes expresiones utilizando relaciones trigonométrica:

a) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)}$ b) $\operatorname{sen}\left(2\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

12. ¿Es cierto que $\dfrac{1}{\tan(x)} = \arctan(x)$? ¿Por qué?

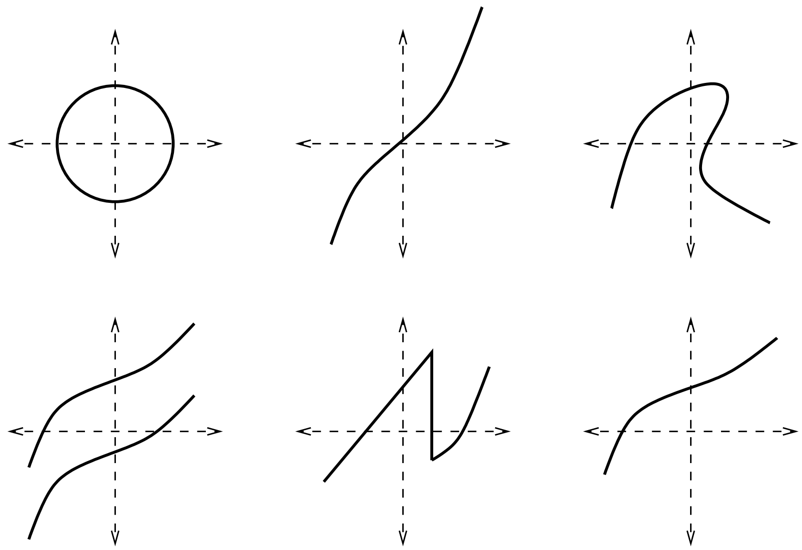
13. ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = \arctan(x)$? ¿Y su imagen? ¿Cuáles son los ángulos cuya tangente vale 1? Sin embargo, ¿es correcto decir que $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$? ¿Por qué?

14. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f_1(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$, b) $f_2(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\cos(\pi x)}$, c) $f_3(x) = \dfrac{x\tan(x)}{x^3 + 1}$,

d) $f_4(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\operatorname{sen}(x)\ln(x)}$, e) $f_5(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{\tan(x)}\right)$, f) $f_6(x) = \dfrac{e^x\left(\ln(x-1)\right)}{\tan\left(\dfrac{e^x}{x^2-1}\right)}$.

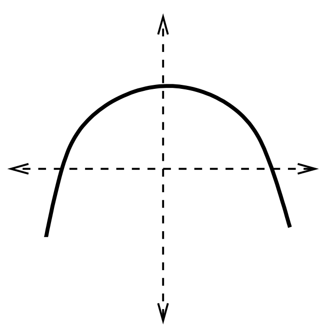
15. ¿Cuáles de los siguientes dibujos podrían representar el gráfico de una función? ¿Por qué?



16. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \tan(x)$. ¿Cuál es su dominio? ¿Cuál es su imagen? ¿Cuánto vale $\lim_{x \to +\infty} \tan(x)$?

    Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \ln(x)$. ¿Cuál es su dominio? ¿Cuál es su imagen? ¿Cuánto vale $\lim_{x \to +\infty} \ln(x)$?

17. ¿Existe la inversa de la función que dibujamos a continuación? ¿Por qué?



18. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, -1)$ y tiene pendiente 3.

19. Calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1, -1)$ y $(2, 3)$.

20. Calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0, 2)$, $(2, 1)$ y $(4, -1)$.

21. Para la ecuación $\quad x(x-3) = 1 \quad$ las soluciones son

    a) $x = 1 \quad$ y $\quad [x - 3 = 1 \Rightarrow x = 4]$.

    b) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

    c) $x = 0 \quad$ y $\quad x = 3$.

22. Resuelve la ecuación $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-5} = 3$.

23. Resuelve la ecuación $\sqrt{x-3} + 5 = x$.

24. Resuelve la ecuación $(x-3)(x^2 - 4x + 4) = 0$.

25. Resuelve $e^{x-3} = 30$.

26. Calcula las ecuaciones de las circunferencias

   a) de centro $(0, 0)$ y radio 2,
   b) de centro $(1, 2)$ y radio 3,
   c) de centro $(-1, 2)$ y radio 4.

27. $y = 2x^2$ es una

a) Circunferencia,	b) Recta,
c) Parábola,	d) Hipérbola.

28. Una solución de $\quad (x-3)^4 + \sqrt{x+1} + (x-82) = 0 \quad$ es

a) $x = 1$,	b) $x = 0$,
c) $x = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$,	d) $x = \ln(\frac{2}{3})$.

RESPUESTAS:

1. NO son iguales. Si queremos trabajar con $\frac{1}{11}$ o $\frac{\pi}{3}$ la representación más correcta es ésa, ya que ninguno de estos números tienen representación decimal exacta.

   Es decir, tan número es $\frac{1}{11}$ como 0.091, y el primero es más exacto en muchos casos. Por eso, el resultado de un ejercicio puede prefectamente ser $\frac{1}{11}$, y no conviene aproximarlo por cosas como 0.091.

2. a) $\dfrac{1}{5}$, b) $-\dfrac{575}{78}$, c) 5, d) 9, e) 9,

   f) 1, g) 2, h) (no existe), i) (no existe),

   j) 1, k) $\dfrac{1}{e}$, l) 1, m) e,

   n) $3^{\frac{3}{2}}+3^{\frac{1}{2}}$, ñ) $\dfrac{\ln(5)+\ln(x)}{\ln(5)-\ln(x)}$, o) $\dfrac{\ln(5+x)}{\ln(5-x)}$, p) $\dfrac{2\,(5+x)}{5x}$,

   q) $\dfrac{3}{2}\ln(2)$, r) $3\left(\ln\left(x^2-1\right)-3\ln(x)\right)$.

3. a) $+\infty$, b) $-\infty$, c) 1, d) (no existe),

   e) 0, f) 1, g) $+\infty$, h) $-\infty$,

   i) $+\infty$, j) 0, k) (no existe), l) 0,

   m) $+\infty$, n) $+\infty$, o) $+\infty$, p) $+\infty$.

4. a) $\dfrac{\sqrt{x^2+2x-15}}{x-3}$, b) $\dfrac{\sqrt{x^2+5x}+3\sqrt{x+5}}{x-9}$, c) $\dfrac{\sqrt{x^2+5x}-3\sqrt{x+5}}{x-9}$.

5. El único polinomio es f_4.

6. a) $f_1^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ b) $f_2^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}$ c) $f_3^{-1}(x)=\ln\left(x-\frac{1}{5}\right)$
   d) $f_4^{-1}(x)=\arctan(x)$ e) $f_5^{-1}(x)=\tan(x)$

7. $A=(-\infty,4)$.

8. a) $B=(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$,
   b) $C=(-\infty,-1)$.

9. $45^o=\frac{\pi}{4}$ radianes. $30^o=\frac{\pi}{6}$ radianes.

   Por supuesto, los ángulos los daremos SIEMPRE en radianes.

10.

Ángulo	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
Coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0
Cotangente	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\nexists$	0	$\nexists$
Secante	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\nexists$	-1	$\nexists$	1
Cosecante	$\nexists$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\nexists$	-1	$\nexists$

11.

a) 0 b) $-\dfrac{1}{2}$.

12. No. arctan es la inversa de la función tangente (es decir, $\arctan(x) = \tan^{-1}(x)$).

 1 partido por algo, $\frac{1}{\cdot}$, es la inversa sólo para la multiplicación.

13. El dominio de la función arco-tangente es todo $\mathbb{R}$. Su imagen es el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

 Los ángulos cuya tangente vale 1 son $\frac{pi}{4} + k\pi$, para cualquier valor entero de k. Sin embargo $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ porque como el arco tangente es una función debe asignar un único valor a cualquier punto del dominio. Para ello calculamos la inversa sólo de la rama principal de la función tangente.

14.

a) $f_1'(x) = \pi\cos(\pi x)$ b) $f_2'(x) = \dfrac{\pi}{\cos^2(\pi x)}$

c) $$f_3'(x) = \frac{-2x^3\tan x + \frac{x^4}{\cos^2 x} + \tan x + \frac{x}{\cos^2 x}}{\left(x^3+1\right)^2}$$

d) $$f_4'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\operatorname{sen}x \ln x - \sqrt{x+1}\left(\cos x \ln x + \frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)}{\operatorname{sen}^2 x \ln^2 x}$$

e) $$f_5'(x) = \frac{\tan x}{x^2+1}\,\frac{2x\tan x - (x^2+1)\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x}$$

f) $$f_6'(x) = \frac{\left(e^x\ln(x-1) + \frac{e^x}{x-1}\right)\tan\left(\frac{e^x}{x^2-1}\right) - e^x\ln(x-1)\,\frac{1}{\cos^2\left(\frac{e^x}{x^2-1}\right)}\,\frac{e^x\left(x^2-1\right)-2xe^x}{\left(x^2-1\right)^2}}{\tan^2\left(\frac{e^x}{x^2-1}\right)}$$

15. Sólamente el segundo y el último podrían representar una función, ya que en todos los demás dibujos se asigna más de una imagen a algún valor de x.

16.

$$\mathrm{Dom}\,(\tan) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\}, \qquad \mathrm{Im}\,(\tan) = \mathbb{R}, \qquad \nexists \lim_{x\to+\infty} \tan(x).$$

$$\mathrm{Dom}\,(\ln) = (0, +\infty), \qquad \mathrm{Im}\,(\ln) = \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty.$$

17. La función dibujada no tiene inversa puesto que no es inyectiva, ya que dos puntos distintos tienen la misma imagen.

18. $y = 3x - 7$.

19. $y = 4x - 5$.

20. Esos tres puntos no están alineados, por lo que no hay ninguna recta que los una.

21. La b).

22. $x = \dfrac{17 \pm \sqrt{229}}{6}$.

23. $x = 7$.

24. $x = 3$, $x = 2$ (doble).

25. $x = 3 + \ln(30)$.

26.
    a) $x^2 + y^2 = 4$,
    b) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$,
    c) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$.

27. $y = 2x^2$ es una parábola.

28. $x = 0$.