Cálculo

Septiembre 2010

Funciones reales de variable real

Conjuntos de números

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$: dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, existe $q \in \mathbb{Q}$ t.q. $a < q < b$

Números complejos

Definición

El conjunto de los **números complejos** *es*

$$\mathbb{C} = \{a + bi \;/\; a, b \in \mathbb{R}\},$$

donde $i = \sqrt{-1}$ *es la unidad imaginaria.*

En $\mathbb{C}$ operaremos de la siguiente manera:

- $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$
- $(a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$

Distintas representaciones de un número complejo z:

$$a + ib \equiv (a,b) \equiv |z|_{\theta}$$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ es el **módulo**, o distancia al origen

$\theta \in [0, 2\pi)$ se denomina **argumento**

Propiedades:

- Sea $a \in \mathbb{R}$; entonces $a = a + 0i \in \mathbb{C}$. Podemos considerar $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- Todo polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_i \in \mathbb{C})$ tiene n raíces en $\mathbb{C}$. (Teorema fundamental del Álgebra)

Función real de variable real

Sea $A \subset \mathbb{R}$

Definición

La correspondencia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **función** *si a cada $x \in A$ le asigna una única imagen $f(x) \in \mathbb{R}$*

Llamamos:

- **dominio**: $\mathscr{D}(f) = \{x /\ \text{existe}\, f(x)\} = \{x / f(x) \in \mathbb{R}\}$
- **imagen**: $\text{Im}\,(f) = \{y \in \mathbb{R} \,/\, y = f(x) \text{ para algún } x \in \mathbb{R}\}$

Función real de variable real

Definición

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real. Sea $B \subset A$.

- *f es* **creciente** *en B si*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in B,$$

- *f es* **estrictamente creciente** *en B si*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in B,$$

- *f es* **decreciente** *en B si*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in B,$$

- *f es* **estrictamente decreciente** *en B si*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in B.$$

Definición

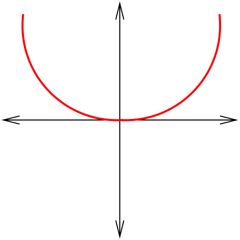
Decimos que f es **inyectiva** *si:*

$$x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

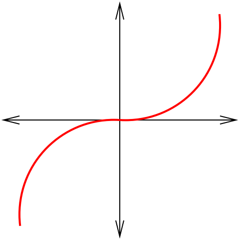
Función real de variable real. Simetrías

Definición

Decimos que una función f es **par** *si $f(x) = f(-x)$, y decimos que es* **impar** *si $f(x) = -f(-x)$*



Función par



Función impar

Nota

El nombre proviene de los monomios fundamentales. Los monomios con exponente par (x^2, x^4, x^6,...) tienen simetría par y los monomios con exponente impar (x, x^3, x^5,...) tienen simetría impar.

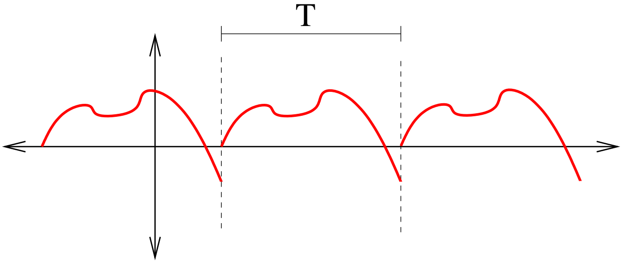
Función real de variable real. Periodicidad

Definición

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diremos que f es **periódica***, con período T si*

$$f(x) = f(x+T), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

El ejemplo más clásico de funciones periódicas son las funciones trigonométricas.
Si sabemos que una función tiene un período T, será suficiente con representarla en $[0, T]$. Después se repetirá.



Composición de funciones

Definición

Sean $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *con* $f(A) \subset B$. *Definimos la* **función compuesta** $g \circ f$ *(se lee "f compuesta con g") a la función*

$$\begin{array}{rcccl} g \circ f & : & A \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x \in A & \to & (g \circ f)(x) := g\,(f(x))\,. \end{array}$$

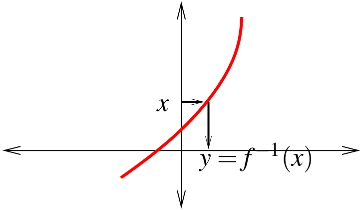
$$x \in A \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g\,(f(x))\,.$$

Función inversa

Definición

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función inyectiva. Existe una única función $h : \mathrm{Im} f \to \mathbb{R}$ tal que $h(f(x)) = x$, $\forall x \in A$.
Esta función se denomina **inversa de f** *y suele denotarse como f^{-1}.*

Es decir, $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$. Además, en este caso se verifica que la composición es conmutativa, es decir, que $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$ (siendo Id la función identidad, es decir, $\mathrm{Id}(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$).



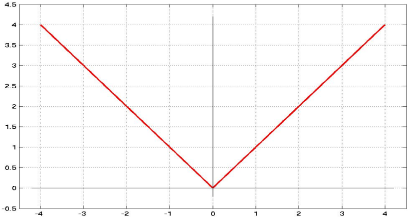
¡No se debe pensar que $f^{-1} = \frac{1}{f}$!
La forma práctica de calcular una función inversa es despejar la x en función de la y (es decir, de $f(x)$) e intercambiar sus papeles.

Valor absoluto

Definición

Sea $x \in \mathbb{R}$, llamamos **valor absoluto** *de x a la cantidad:*

$$|x| = \begin{cases} -x, & si\ x < 0, \\ x, & si\ x \geq 0. \end{cases}$$

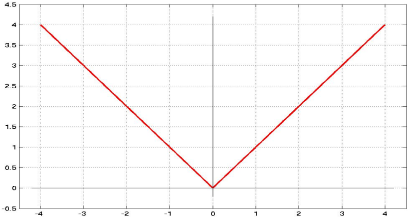


Definición

Dado $x \in \mathbb{R}$, su distancia al origen es $d(x,0) := |x|$. En general, para x, $y \in \mathbb{R}$, definimos la **distancia** *entre estos dos puntos como*

$$d(x,y) := |x-y|.$$

Valor absoluto



Propiedad

Sean $x, y \in I\!R$

- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$ *(desigualdad triangular)*
- $|xy| = |x|\,|y|, \qquad \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, *si* $y \neq 0$.
- *Si* $C > 0, \quad |x| \leq C \quad \Longleftrightarrow \quad -C \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq C$

Funciones polinómicas

Las **funciones polinómicas** son funciones del tipo

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

con a_0, a_1, ..., $a_n \in \mathbb{R}$, y $a_n \neq 0$.

Diremos que

- **grado del polinomio** es n,
- **coeficiente principal** es a_n.

Ejemplos de polinomios son

1. $p_1(x) = 5x^3 - 4x + 2$,
2. $p_2(x) = 8x^3 - \sqrt{2}$,
3. $p_3(x) = \pi x^4 + 2x^3 - 3x$.

El dominio de una función polinómica es siempre $\mathbb{R}$, mientras que su imagen varía en cada caso.

Funciones racionales

Las **funciones racionales** son cocientes de funciones polinómicas, es decir,

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Ejemplos de funciones racionales son

1. $f_1(x) = \dfrac{5x^3 - 4x + 2}{8x^3 - \sqrt{2}}$,
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{x^3 + 2}$.

El dominio de estas funciones son todos los reales, excepto aquéllos que anulen el denominador,

$$\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : q(x) = 0\},$$

mientras que su imagen varía en cada caso.

Función exponencial

Sea $a > 0$. Definimos la **función exponencial** de base a como

$$f(x) = a^x.$$

Siempre que $a \neq 1$,

- $\text{Dom} f = \mathbb{R}$,
- $\text{Im} f = (0, +\infty)$,
- $f(0) = a^0 = 1$.

1. $\boldsymbol{a < 1}$. En este caso,
   - $f(x) = a^x$ es una función estrictamente decreciente,

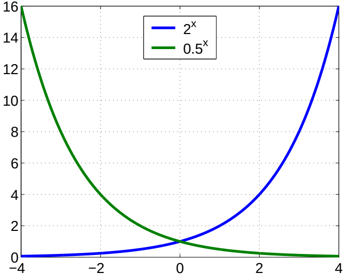
     $$x < y \Rightarrow a^x > a^y,$$

   - $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$,
   - $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$.
2. $\boldsymbol{a > 1}$. En este caso,
   - $f(x) = a^x$ es una función estrictamente creciente,

     $$x < y \Rightarrow a^x < a^y,$$

   - $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$,
   - $\lim_{x \to +\infty} a^y = +\infty$.

Función exponencial



El caso más importante es la función $f(x) = e^x$ (recordemos que $e = 2{,}7182818...$). A esta función es a la que se suele conocer, por defecto, como **función exponencial**.

Propiedad

i) $a^{x+y} = a^x a^y, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},$

ii) $(a^x)^y = a^{xy}, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},$

iii) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$ *(consecuencia de la anterior propiedad).*

Función logarítmica

Es la inversa de la función exponencial.

Definición

Dado $a > 0$, $a \neq 1$, decimos que y es el **logaritmo** *en base a de x si $a^y = x$,*

$$y = \log_a(x) :\Longleftrightarrow a^y = x.$$

Propiedad

Para cualquier valor de a,

- *el* **dominio** *de la función logaritmo lo forman los números positivos:* $\mathrm{Dom}\log = (0, +\infty)$,
- *la* **imagen** *es* $\mathbb{R}$,
- $\log_a(1) = 0$.

Propiedad

i) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},$

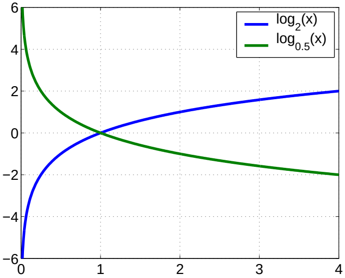
ii) $\log_a(x^y) = y \log_a(x), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},$

iii) $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad y \neq 0.$

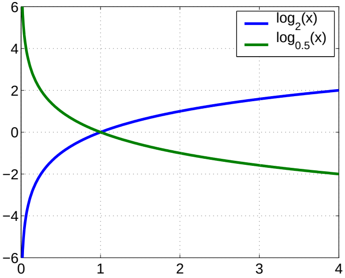
Función logarítmica

1. $\boldsymbol{a > 1}$. En este caso,
   - $f(x) = \log_a(x)$ es una función estrictamente creciente,
   $$x < y \Rightarrow \log_a(x) < \log_a(y),$$
   - $\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty$,
   - $\lim_{x\to +\infty} \log_a(y) = +\infty$.

2. $\boldsymbol{a < 1}$. En este caso la situación se invierte, como se muestra en la gráfica.



Función logarítmica



El logaritmo más utilizado es el que tiene como base el número e, $f(x) = \log_e(x)$. Se denomina **logaritmo neperiano**, y suele denotarse por $\ln(x)$ o, simplemente, $\log(x)$. Cualquier otro logaritmo se puede expresar en función del ln mediante la fórmula

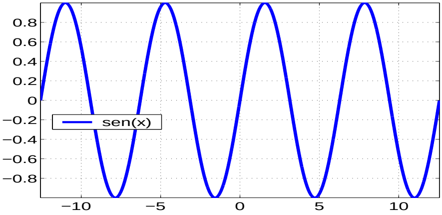
$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Funciones trigonométricas

Función seno

La función $f(x) = \sin(x)$, verifica

- su dominio es todo $\mathbb{R}$,
- su imagen es $[-1, 1]$,
- es una función impar,
- es una función periódica con período 2π.

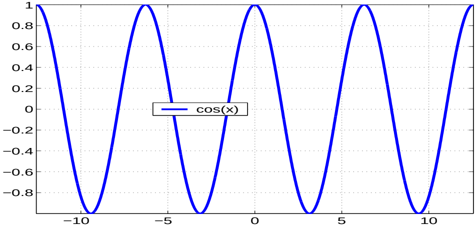


Funciones trigonométricas

Función coseno

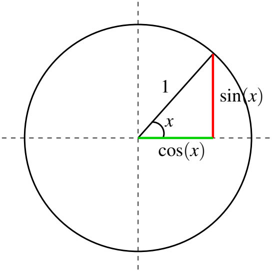
La función $f(x) = \cos(x)$, verifica

- su dominio es todo $\mathbb{R}$,
- su imagen es $[-1, 1]$,
- es una función par,
- es una función periódica con período 2π.



Funciones trigonométricas

El seno y el coseno pueden entenderse como las longitudes de las proyecciones sobre los ejes del ángulo, en radianes, dibujado sobre la circunferencia de radio unidad.



Propiedad

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad \forall x,$
- $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),$
- $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$

Funciones trigonométricas

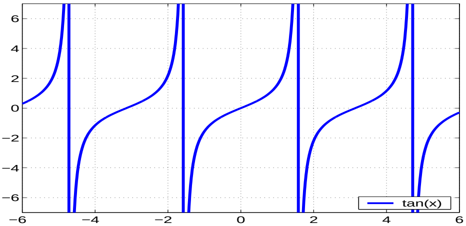
Definimos la **función tangente** como

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

El dominio de esta función lo forman todos los puntos de $\mathbb{R}$ en los que el coseno no se anule, es decir,

$$\text{Dom}\tan = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\},$$

mientras que su imagen es todo $\mathbb{R}$. Además, es una función impar y periódica, con período π.



Funciones trigonométricas

Otras funciones trigonométricas

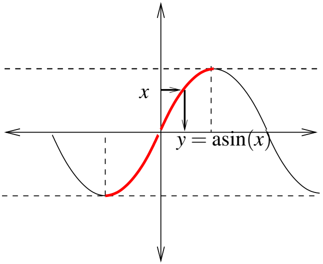
- Cosecante, $\operatorname{cosec}(x) := \dfrac{1}{\sin(x)}$,
- Secante, $\sec(x) := \dfrac{1}{\cos(x)}$,
- Cotangente, $\operatorname{cotan}(x) := \dfrac{1}{\tan(x)}$.

Funciones trigonométricas inversas

Función arco-seno

Es la inversa de la función seno. Como ésta no es una función inyectiva, restringimos su dominio, quedándonos con el seno definido sólo en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

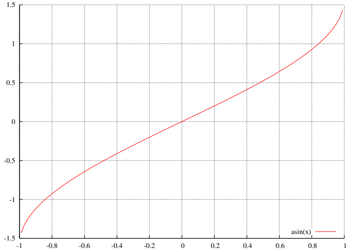
Definimos entonces la función arco-seno, $\arcsin(x)$, como la función que, dado un $x \in [-1, 1]$, le asocia el único y en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



Funciones trigonométricas inversas

Función arco-seno

Por tanto la función $\arcsin(x)$ tiene como dominio el intervalo $[-1,1]$ y como imagen el $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Es una función impar.

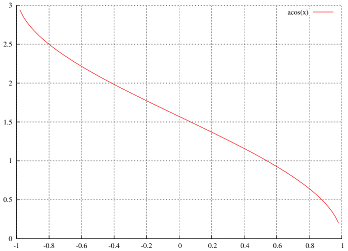


Funciones trigonométricas inversas

Función arco-coseno

Es la inversa de la función coseno. En este caso, restringimos el dominio para quedarnos con el coseno definido en el intervalo $[0,\pi]$.

Definimos entonces la función arco-coseno, $\arccos(x)$, como la función que, dado un $x \in [-1,1]$, le asocia el único y en $[0,\pi]$ tal que $x = \cos(y)$.

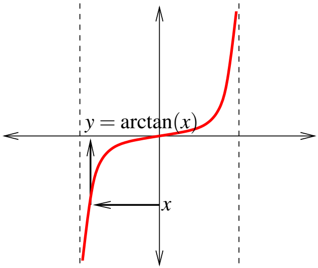


Funciones trigonométricas inversas

Función arco-tangente

Es la inversa de la función tangente. Restringimos su dominio al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

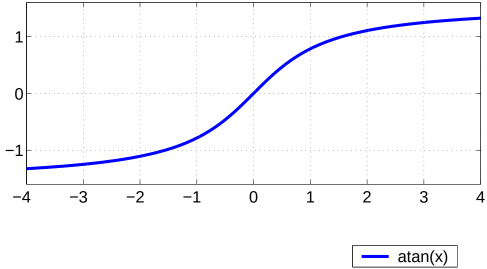
Definimos entonces la función arco-tangente, $\arctan(x)$, como la función que, dado un $x \in \mathbb{R}$, le asocia el único y en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $x = \tan(y)$.



Funciones trigonométricas inversas

Función arco-tangente

Por tanto la función $\arctan(x)$ tiene como dominio todo $\mathbb{R}$ y como imagen el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Es una función impar.



Definición de límite. Introducción

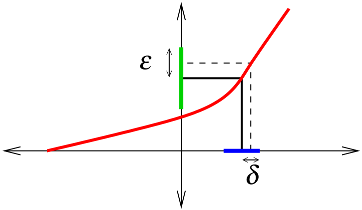


Figura: Eligiendo x en el intervalo azul, $f(x)$ estará en el verde

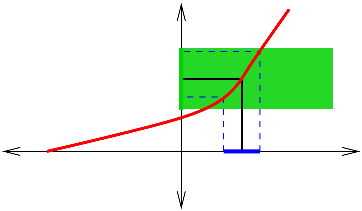


Figura: Si x está en el intervalo azul, $(x, f(x))$ está dentro del rectángulo verde

Límite de una función en un punto

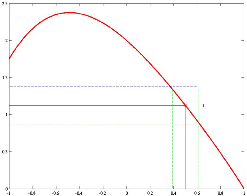
Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$

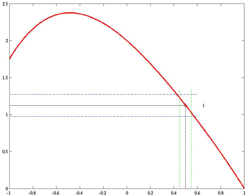
Definición

Decimos que $\ell \in \mathbb{R}$ *es* **límite** *de* f *en* $x_0 \in (a,b)$ *si:*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Se representa por $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$





Propiedad

El límite de una aplicación en un punto, si existe, es único.

Propiedad

Supongamos que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ *y* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$. *Entonces,*

- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2$
- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\, g(x)) = \ell_1\, \ell_2$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\ell_1}{\ell_2} \quad si \;\; \ell_2 \neq 0$

Límites laterales

Definición

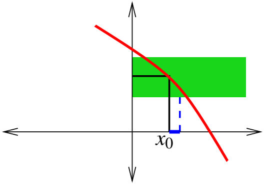
- *Diremos que el límite de f, cuando x se acerca a x_0 por la derecha, es l si*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l :\Longleftrightarrow \left[\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \middle/ \ 0 < x - x_0 < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\right].$$

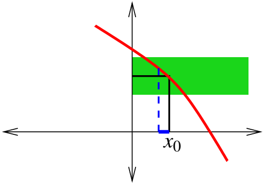
- *Diremos que el límite de f, cuando x se acerca a x_0 por la izquierda, es l si*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l :\Longleftrightarrow \left[\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \middle/ \ 0 < x_0 - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\right].$$

Límites laterales



Límite por la derecha



Límite por la izquierda

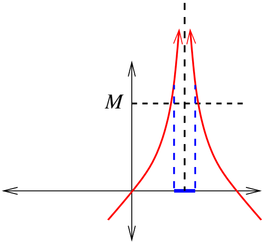
Propiedad

Existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *si y sólo si existen* $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ *y* $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ *y son iguales.*

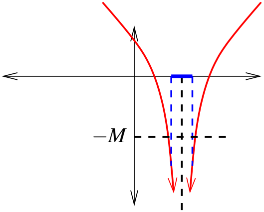
Límites infinitos

Definición

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty :\Longleftrightarrow$
$\left[\forall M > 0, \exists \delta > 0 \middle/ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M\right]$,
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty :\Longleftrightarrow$
$\left[\forall M > 0, \exists \delta > 0 \middle/ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M\right]$.



$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

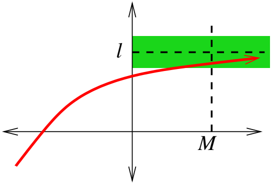


$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

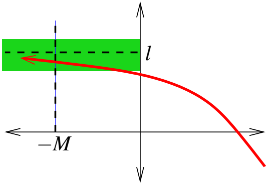
Límites en el infinito

Definición

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l :\Longleftrightarrow \Big[\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \Big/ x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\Big]$,
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l :\Longleftrightarrow \Big[\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \Big/ x < -M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\Big]$.



$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$

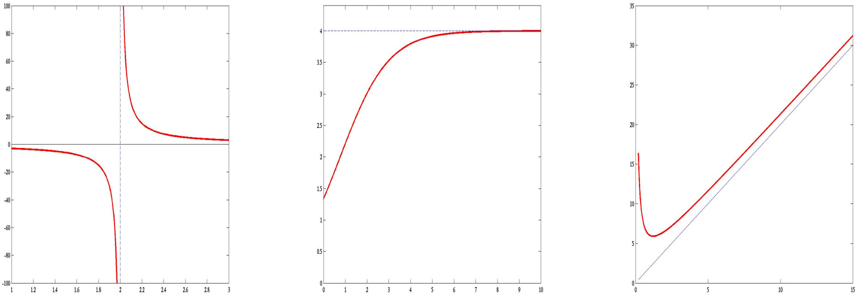


$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$

Decimos que la función f tiene:

- una **asíntota horizontal** en $y = l$ si: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = l$
- una **asíntota vertical** en $x = x_0$ si: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$
- una **asíntota oblicua** si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$.

  Para calcular m y n: $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Si $m \neq 0$ y $m \neq \infty$, entonces calculamos $n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$;
  la ecuación de la asíntota es: $y = mx + n$



Continuidad

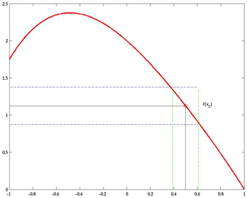
Sea $f : (a,b) \longrightarrow I\!R, \quad x_0 \in (a,b)$

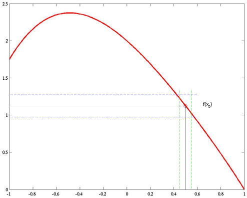
Definición

Decimos que la aplicación f es **continua** *en x_0 si y sólo si:*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \delta > 0 \; tal\ que \; |x_0 - x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$$

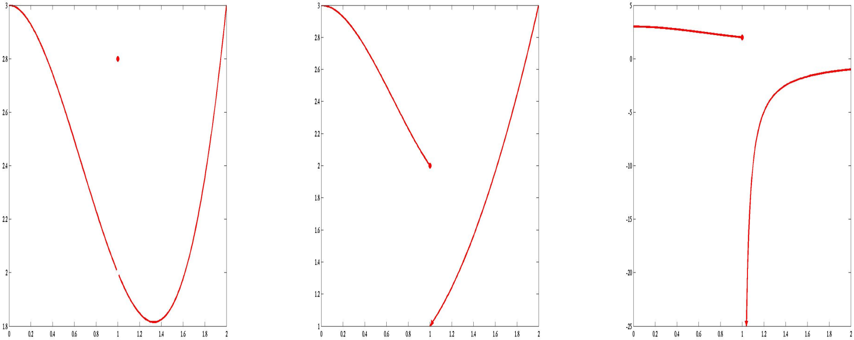
o bien, teniendo en cuenta la definición de límite, si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$





En caso de no cumplir la condición anterior, decimos que f es **discontinua** en x_0. Las discontinuidades pueden ser de varios tipos:

- **evitable**: $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$
- **esencial**: no existe el límite de f en x_0, porque:
  - $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f(x)$
  - alguno de los límites laterales (o ambos) no existe



Propiedad

Si $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *son funciones continuas en* $x_0 \in (a,b)$,

- λf *es continua en* x_0, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,
- $(f \pm g)$ *y* $(f \cdot g)$ *son continuas en* x_0,
- *si* $g(x_0) \neq 0$, *entonces* $\dfrac{f}{g}$ *es continua en* x_0.

Propiedad

La composición de funciones continuas es una función continua. Además, si f *y* g *son funciones tales que* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ *y* g *es continua en* ℓ, *entonces*

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\ell)$$

Propiedad

El límite conmuta con las funciones continuas. Es decir, sean f *y* g *funciones tales que existe* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ *y* g *es una función continua en* l.
Entonces $$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) = g(l).$$

Continuidad en intervalos

Definición

Sea $f:(a,b)\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*. Diremos que* f **es continua en** (a,b) *si es continua en todos los puntos de* (a,b)*.*

Definición

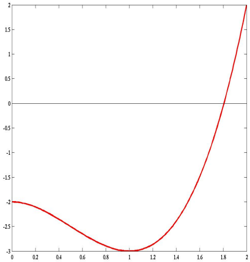
Sea $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*. Diremos que* f **es continua en** $[a,b]$ *si*

1. f *es continua en* (a,b)*,*
2. f *es continua en* a *por la derecha,*
3. f *es continua en* b *por la izquierda.*

Teorema de Bolzano

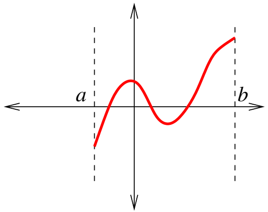
Teorema (de Bolzano)

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua. Supongamos que* $f(a)f(b) < 0$. *Entonces* $\exists x_0 \in (a,b)$ *tal que* $f(x_0) = 0$

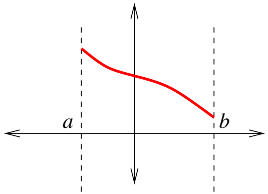


Teorema de Bolzano. Comentarios

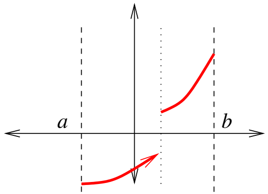
1. Pueden existir varias raíces,



2. Si se suprime alguna de las hipótesis, el teorema no es aplicable,



$f(a)f(b) > 0$



f no continua en $[a,b]$

Teorema de Bolzano. Cálculo de raíces

Método de bisección o dicotomía

Consideramos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ con $f(a)f(b) < 0$.

Para aproximar una raíz de f, el *método de bisección*:

- Divide el intervalo dado a la mitad.
- Toma el punto medio del intervalo como aproximación de la raíz.
- Repite el proceso con la mitad del intervalo en la que f presenta un cambio de signo.

Teorema de Bolzano. Cálculo de raíces

Método de bisección o dicotomía

- Inicializamos $[a_1, b_1] = [a, b]$.
- Para $k = 1, 2, \ldots$

  Calculamos $x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.

  Si $f(a_k)f(x_k) < 0$, actualizamos $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, x_k]$

  Si no, $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [x_k, b_k]$

Nota

El proceso se repite hasta que x_k aproxima satisfactoriamente una raíz α. Notemos que

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^k}$$

Teorema de Weierstrass

Teorema (de Weierstrass)

Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua, entonces* f *alcanza el máximo y el mínimo en el intervalo* $[a,b]$*, es decir, existen* $x_1, x_2 \in [a,b]$ *tales que:*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \qquad \forall x \in [a,b]$$