Capítulo 2

Sistemas de Ecuaciones Lineales y Matrices. Determinantes

2.1. Preliminares

Consideremos $K = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{Z}_p$ con p un número primo. Para cada uno de estos conjuntos conocemos dos operaciones, una operación **suma** ($+ : K \times K \to K$) y una operación **producto** (denotada por $\cdot : K \times K \to K$). Estas operaciones verifican las siguientes propiedades:

- Asociativa: para cualesquiera α, β, $\gamma \in K$ se verifica

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma), \qquad (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$$

- Existe $0 \in K$ tal que $0 + \alpha = \alpha = \alpha + 0$, $\forall \alpha \in K$ (0 es el elemento neutro para la suma).

  Existe $1 \in K$ tal que $1 \cdot \alpha = \alpha = \alpha \cdot 1$, $\forall \alpha \in K$ (1 es el elemento neutro para el producto).

- Para cada $\alpha \in K$ existe el elemento $-\alpha \in K$ (llamado el elemento *opuesto* de α para la suma) tal que $\alpha + (-\alpha) = 0 = (-\alpha) + \alpha$.

  Para cada $\alpha \in K - \{0\}$ existe el elemento $\alpha^{-1} \in K$ (llamado el elemento *inverso* de α para el producto) tal que $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1 = \alpha^{-1} \cdot \alpha$.

- Conmutativa: para cualesquiera α, $\beta \in K$ se verifica

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha, \qquad \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$

- Distributiva del producto repecto a la suma: para cualesquiera α, β, $\gamma \in K$ se verifica

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \quad \text{y} \quad (\beta + \gamma) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha$$

Un conjunto K con dos operaciones internas $+$ y $\cdot$ cumpliendo las propiedades anteriores se llama **cuerpo conmutativo**. Los elementos de K se llaman **escalares**.

Ejemplo 2.1.1. $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo, en el cual los opuestos de $0, 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 son $0, 6, 5, 4, 3, 2$ y 1, respectivamente, y sus inversos son $1^{-1} = 1,\ 2^{-1} = 4,\ 4^{-1} = 2,\ 3^{-1} = 5,\ 5^{-1} = 3$ y $6^{-1} = 6$.

I. Sistemas de Ecuaciones Lineales y Matrices

2.2. Sistemas de Ecuaciones Lineales

Sea K un cuerpo conmutativo, una **ecuación lineal** con n-incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con coeficientes en K es una expresión de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

donde los términos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son elementos (conocidos) de K y se llaman **coeficientes**, el término b es también un elemento (conocido) de K llamado **término independiente**. Si $b = 0$, la ecuación se dice **homogénea**.

Nótese que en una ecuación lineal no pueden aparecer términos como una incógnita al cuadrado ni el producto de dos incógnitas.

Ejemplo 2.2.1. Las ecuaciones $2x + 5y = 0$, $3x - y + 2z = 6$ son ecuaciones lineales, mientras que $2x^2 + 5y = 0$, $xy + 3z = 1$, $sen(x) + y = 0$ no son lineales.

Una solución de una ecuación es una asignación de valores a las incógnitas de forma que se verifique la igualdad. Así, por ejemplo, para la ecuación $2x + 5y = 0$, con coeficientes en $\mathbb{R}$, una solución es $x = 0, y = 0$ y otra solución es $x = 5, y = -2$. Si consideramos la ecuación $2x + 5y = 0$ con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$ una solución es $x = 5, y = 5$.

Cuando tenemos varias ecuaciones lineales, hablaremos de sistema de ecuaciones lineales y los coeficientes llevarán un doble subíndice, para hacer referencia a la ecuación en la que aparecen y a la incógnita a la que multiplican (más adelante formarán parte de una matriz).

Definición 2.2.2. Un **sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas** es una colección de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

Un sistema de ecuaciones homogéneas se denomina **sistema homogéneo**.

Una solución del sistema es una colección ordenada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de elementos de K tales que:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\alpha_1 & + & a_{12}\alpha_2 & + & \dots & + & a_{1n}\alpha_n & = & b_1 \\ a_{21}\alpha_1 & + & a_{22}\alpha_2 & + & \dots & + & a_{2n}\alpha_n & = & b_2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}\alpha_1 & + & a_{m2}\alpha_2 & + & \dots & + & a_{mn}\alpha_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

Un sistema es **compatible** si admite alguna solución. En caso contrario, se denomina **incompatible**. Cuando la solución del sistema es única, el sistema es **compatible determinado** y si hay más de una solución, se habla de sistema **compatible indeterminado**. Un sistema homogéneo siempre es compatible pues admite, al menos, la solución trivial $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$.

Ejemplo 2.2.3. Una solución del sistema con coeficientes en $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 2 \\ x & - & y & = & 0 \end{array}\right\}$$

es $x = 1, y = 1$ y esta es la única solución. Sin embargo, el sistema

$$\left.\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 2 \\ x & + & y & = & 3 \end{array}\right\}$$

no tiene solución. Finalmente, el sistema

$$\left.\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 2 \\ 2x & + & 2y & = & 4 \end{array}\right\}$$

tiene más de una solución, en concreto, la solución general de este sistema es el conjunto $\{(\lambda, 2-\lambda; \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Dos sistemas con n incógnitas se dice que son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto de soluciones. Las operaciones que permiten transformar un sistema en otro equivalente son:

I) Intercambiar dos ecuaciones del sistema.

II) Multiplicar una ecuación por un escalar no nulo.

III) Sumar a una ecuación otra distinta del sistema.

IV) Aplicar reiteradamente las reglas anteriores; en particular, sumarle a una ecuación una combinación lineal (suma de múltiplos) de las restantes ecuaciones.

Veremos cómo resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante el **Método de Gauss**, que consiste en transformar un sistema en otro equivalente que sea escalonado (a través de las operaciones permitidas) y resolver éste, si es posible, o concluir que no posee solución. Un sistema se denomina sistema **escalonado** si, en cada ecuación, la primera incógnita que aparece (la primera que está multiplicada por un coeficiente no nulo) no aparece en las siguientes ecuaciones del sistema, es decir, sus correspondientes coeficientes serían cero. El primer coeficiente no nulo en cada ecuación de un sistema escalonado se llama **pivote**.

Ejemplo 2.2.4. Consideremos el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ 4x & + & y & & & = & -2 \\ -2x & + & 2y & + & z & = & 7 \end{array}\right\}$$

Procedamos a efectuar operaciones elementales en él. A la segunda ecuación le restamos la primera multiplicada por 2 y a la tercera ecuación le sumamos la primera. Nos queda, entonces, el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ & - & y & - & 2z & = & -4 \\ & & 3y & + & 2z & = & 8 \end{array}\right\}$$

A continuación, le sumamos a la tercera ecuación la segunda multiplicada por tres y nos queda:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ & - & y & - & 2z & = & -4 \\ & & & - & 4z & = & -4 \end{array}\right\}$$

Se obtiene así un sistema escalonado. Ahora se pueden seguir dos caminos. Una primera posibilidad, el método de Gauss, consiste en hacer substitución regresiva: de la última ecuación, deducimos que $z = 1$; substituimos ese valor de z en la segunda ecuación y obtenemos $y = 2$; finalmente, de la primera ecuación deducimos que $x = -1$. Por otra parte, el método de Gauss-Jordan consiste en continuar simplificando el sistema mediante operaciones elementales: multiplicando la tercera ecuación por el inverso de -4 se obtiene

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ & - & y & - & 2z & = & -4 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}\right\}$$

sumando a la segunda ecuación el doble de la tercera y restando a la primera la tercera se tiene:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & & & = & 0 \\ & - & y & & & = & -2 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}\right\}$$

y, finalmente, sumando a la primera ecuación la segunda, multiplicando ésta por -1 y luego la primera por el inverso de 2 se resulta:

$$\left.\begin{array}{rrrcr} x & & & = & -1 \\ & y & & = & 2 \\ & & z & = & 1 \end{array}\right\}$$

con lo que se obtiene la solución del sistema.

Se trata pues de un sistema compatible determinado. Geométricamente, podemos interpretarlo como tres planos que se cortan en un punto (hemos de recordar que la ecuación de un plano en el espacio es de la forma $ax+by+cz = d$, con lo cual cada ecuación del sistema representa un plano en $\mathbb{R}^3$).

Veámos ahora otros dos ejemplos de aplicación del método anterior.

Ejemplo 2.2.5. Consideremos el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & - & y & - & z & = & -1 \\ 3x & + & y & + & z & = & 7 \end{array}\right\} \sim_{E_2-E_1,\ E_3-3E_1,\ E_2/(-2),\ E_3/(-2)} \left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ & & y & + & z & = & 1 \end{array}\right\}$$

Ahora le restamos a la tercera ecuación la segunda y nos queda:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ & & & & 0 & = & -1 \end{array}\right\}$$

que se corresponde con un sistema incompatible. Sea ahora el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -3 \\ 2x & + & 3y & - & 2z & = & 5 \\ 3x & + & y & - & z & = & 2 \end{array}\right\} \sim_{E_2-2E_1,\ E_3-3E_1} \left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -3 \\ & & 7y & - & 4z & = & 11 \\ & & 7y & - & 4z & = & 11 \end{array}\right\}$$

Si ahora le restamos a la tercera ecuación la segunda, nos queda:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -3 \\ & & 7y & - & 4z & = & 11 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Este sería un ejemplo de sistema compatible indeterminado. Podemos poner
$z = t$, $y = \frac{4}{7}t + \frac{11}{7}$, $x = \frac{1}{7}t + \frac{1}{7}$ con $t \in \mathbb{R}$. Es decir, el conjunto de soluciones es $S = \{(\frac{1}{7}t + \frac{1}{7}, \frac{4}{7}t + \frac{11}{7}, t, t);\ t \in \mathbb{R}\}$.

Teorema 2.2.6. *(Discusión de un sistema escalonado). Consideremos un sistema escalonado de m ecuaciones lineales, n incógnitas y con $r \leq n$ ecuaciones no nulas (algún coeficiente es distinto de cero) que supondremos las primeras del sistema. Se verifica que:*

I) *Si alguno de los términos independientes de las $m - r$ ecuaciones nulas es distinto de cero, el sistema es incompatible.*

II) *Si todos ellos son nulos, el sistema es compatible, pudiéndose dar dos casos:*

  a) Si $r = n$, el sistema es compatible determinado.

  b) Si $r < n$, el sistema es compatible indeterminado.

Demostración. I) Supongamos $b_s \neq 0$. Si $0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + \cdots + 0 \cdot \alpha_n = b_s \Rightarrow 0 \neq 0$ (absurdo). Por tanto no existe solución.

II) a) Reordenando el sistema, si es necesario, podemos suponer que tiene la forma

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{nn}x_n & = & b_n \\ 0 & = & 0 \end{array}\right\}$$

con $a_{ii} \neq 0$ para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Se resuelve despejando regresivamente.

b) Si $r < n$. Transformamos el sistema en un sistema de r ecuaciones con r incógnitas escalonado y compatible. Para ello pasamos $n-r$ incógnitas a la parte derecha considerándolas parte del término independiente y se las denomina parámetros (no pueden ser cualesquiera, lo habitual es considerar las incógnitas cuyos coeficientes no son pivotes). A continuación se resuelve despejando sucesivamente, quedando la solución en función de los $n-r$ parámetros, y por tanto, no es única.

$\square$

Ejemplo 2.2.7. Dado un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, al calcular un sistema escalonado equivalente se obtiene:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & z & - & 2t & = & 4 \\ & & & & z & + & t & = & 1 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right\} \sim \left.\begin{array}{ccccccccc} x & + & z & = & 4 & + & y & + & 2t \\ & & z & = & 1 & & & - & t \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \end{array}\right\}$$

Finalmente, tenemos el sistema equivalente

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & = & 3 & + & y & + & 3t \\ z & = & 1 & & & - & t \end{array}\right\}$$

con $y, t \in \mathbb{R}$. Nótese que en este caso se han tomado y y t como parámetros.

2.3. Operaciones con Matrices

Como podemos observar, son los coeficientes y los términos independientes de cada ecuación de un sistema de ecuaciones lineales los implicados en el método de Gauss. Utilizaremos, pues, una representación de los sistemas haciendo uso de las matrices.

Definición 2.3.1. Una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $m \times n$ sobre un cuerpo K es una colección de mn elementos de K dispuestos en una tabla de doble entrada con m filas y n columnas. Al elemento que ocupa la fila i-ésima y la columna j-ésima, se le denota a_{ij}. Así pues:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son iguales si tienen el mismo orden y, para cada par de índices i, j se verifica que $a_{ij} = b_{ij}$. Al conjunto de las matrices de orden $m \times n$ con coeficientes en K se denota $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$. La **matriz nula** 0 es la matriz con todos los coeficientes iguales a 0. Si $m = n$, las matrices se llaman **cuadradas** y el conjunto de todas ellas se denota por $\mathcal{M}_n(K)$. La **matriz identidad** de orden n, $I_n \in \mathcal{M}_n(K)$ es la matriz $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $a_{ij} = 1$ si $i = j$.

Una matriz con una única fila se llama **matriz fila** y con una única columna se llama **matriz columna**.

Ejemplo 2.3.2. Las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & b \end{pmatrix}$$

son matrices de orden 2×3 y son iguales si, y sólo si, $a = 1$ y $b = 6$. Sin embargo, las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

no son iguales porque son de distinto orden.

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n. A se dice que es:

i) **simétrica** si $a_{ij} = a_{ji}$, para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

ii) **antisimétrica** si $a_{ij} = -a_{ji}$, para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

iii) **triangular superior** si $a_{ij} = 0$, para todo $i > j$,

iv) **triangular inferior** si $a_{ij} = 0$, para todo $i < j$,

v) **diagonal** si $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$.

Definición 2.3.3. Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices en $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Se define la **suma** de A y B como una matriz $A + B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ cuyos coeficientes son

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Si $\lambda \in K$ es un escalar, la matriz $\lambda A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ tiene por coeficientes

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Proposición 2.3.4. *Si* $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ *y* $\lambda, \mu \in K$, *se verifican las siguientes propiedades:*

i) $(\mathcal{M}_{m\times n}(K), +)$ *es un grupo conmutativo, es decir, la suma de matrices verifica las propiedades:*

- *asociativa:* $A + (B + C) = (A + B) + C,\ \forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$,
- *elemento neutro: la matriz nula* $0 \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ *verifica* $A + 0 = 0 + A = 0,\ \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$,
- *elemento opuesto: dada una matriz* $A = (a_{ij})$, *la matriz* $-A = (-a_{ij})$ *verifica* $A + (-A) = 0 = (-A) + A$,
- *conmutativa:* $A + B = B + A,\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

ii) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,

iii) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,

iv) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$,

v) $1_K A = A$.

Definición 2.3.5. Sean $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(K)$ dos matrices. Se define el producto de A y B como una matriz $A \cdot B \in \mathcal{M}_{m\times p}(K)$ cuyos coeficientes son

$$(A \cdot B)_{ij} = (a_{i1} \dots a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj},$$

para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ y $j \in \{1, \dots, p\}$.

Proposición 2.3.6. *Sean* $A, A' \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, $B, B' \in \mathcal{M}_{n\times p}(K)$ *y* $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(K)$. *Se verifican las siguientes propiedades:*

i) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$,

ii) $(A + A') \cdot B = A \cdot B + A' \cdot B$,

iii) $A \cdot (B + B') = A \cdot B + A \cdot B'$,

iv) $A \cdot I_n = A$ *y* $I_m \cdot A = A$,

v) $(\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B) = \lambda(A \cdot B)$; *para todo* $\lambda \in K$.

Ejemplo 2.3.7. I) El producto de matrices no es conmutativo. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

II) Puede ocurrir que el producto de dos matrices no nulas sea nulo. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 2.3.8. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ una matriz cualquiera. Se define la **traspuesta** de A como la matriz $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}(K)$ tal que $(A^t)_{ji} = a_{ij}$, para todo $i \in \{1,\dots,m\}$ y $j \in \{1,\dots,n\}$.

Proposición 2.3.9. *Se verifican las siguientes propiedades:*

I) $(A^t)^t = A$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$,

II) $(A+B)^t = A^t + B^t$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$,

III) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$,

IV) $(A\cdot B)^t = B^t \cdot A^t$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K),\ \forall B \in \mathcal{M}_{n\times p}(K)$,

Demostración.

$$(A\cdot B)^t{}_{ij} = (A\cdot B)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\cdot b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} (B^t)_{ik}\cdot (A^t)_{kj} = \left(B^t\cdot A^t\right)_{ij}$$

V) *Si* $A \in \mathcal{M}_n(K)$:

a) A *es antisimétrica si, y sólo si,* $A^t = -A$,

b) A *es simétrica si, y sólo si,* $A = A^t$,

c) $A + A^t$ *es una matriz simétrica,*

d) $A - A^t$ *es una matriz antisimétrica.*

2.4. Forma matricial de un sistema

Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

se llama **matriz de coeficientes** del sistema a la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Si denotamos por $X = (x_1 \dots x_n)^t \in \mathcal{M}_{n\times 1}(K)$ a la matriz columna de las incógnitas y por $B = (b_1 \dots b_m)^t \in \mathcal{M}_{m\times 1}(K)$ a la matriz columna de los términos independientes, el sistema se puede expresar como

$$A \cdot X = B \qquad \text{(forma matricial del sistema).}$$

La matriz $(A|B) \in \mathcal{M}_{m\times(n+1)}(K)$ se llama **matriz ampliada** del sistema.

Las operaciones elementales sobre las ecuaciones de un sistema que realiza el método de Gauss con el objeto de transformar el sistema en otro equivalente pero escalonado, se corresponden de forma natural con las operaciones elementales que se pueden efectuar en las filas de la matriz ampliada de dicho sistema.

Las operaciones permitidas sobre las filas de una matriz dada (la matriz ampliada del sistema) para obtener la matriz ampliada de un sistema equivalente son:

i) Intercambiar la posición de dos filas cualesquiera de la matriz.

ii) Multiplicar todos los elementos de una fila por un escalar no nulo.

iii) Sumar a una fila otra fila distinta cualquiera de la matriz.

iv) Aplicar reiteradamente las reglas anteriores; en particular, sumarle a una fila una “combinación lineal” (una suma de múltiplos constantes) de las restantes filas.

Dos matrices se dice que son **equivalentes por filas** si una puede obtenerse a partir de la otra mediante una secuencia finita de operaciones elementales en las filas.

Análogamente se pueden definir las mismas operaciones para las columnas de una matriz y obtener **matrices equivalentes por columnas**.

2.5. Matrices elementales

Las operaciones elementales efectuadas en una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, ya sean por filas o por columnas, se pueden realizar multiplicando la matriz A por la izquierda, para las filas, o por la derecha, para las columnas, por determinadas matrices llamadas matrices elementales.

Llamaremos **matrices elementales** de orden n a las matrices resultantes de aplicar una (y sólo una) transformación elemental por filas a la matriz identidad de orden n. Puesto que hay tres tipos de operaciones elementales, existirán también tres tipos de matrices elementales:

I) Denotamos por E_{ij} a la matriz elemental obtenida de la matriz identidad intercambiando las filas i-ésima y j-ésima, esto es:

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \dots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \dots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

II) Denotamos por $E_i(\lambda)$ a la matriz que se obtiene de la identidad multiplicando por $\lambda \neq 0$ los elementos de la fila i-ésima:

$$E_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

III) Denotamos por $E_{i+\lambda j}$ a la matriz que se obtiene de la identidad sumando a la fila i-ésima la fila j-ésima multiplicada por λ.

$$E_{i+\lambda j} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & \lambda & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Notemos que las matrices elementales se pueden obtener también aplicando a la identidad transformaciones elementales de columnas.

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y sean E y F matrices elementales de órdenes m y n, respectivamente. Entonces:

- EA es la matriz que se obtiene de A realizando en sus filas la misma transformación elemental con la que se obtiene E a partir de la identidad.

- AF es la matriz que se obtiene de A realizando en sus columnas la misma transformación elemental con la que se obtiene F a partir de la identidad.

Una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ se dice que es **escalonada por filas** si cada una de las filas de la matriz, excepto tal vez la primera, comienza con una secuencia de ceros con al menos un cero más que la fila anterior o está formada únicamente por ceros; estas filas están colocadas en las últimas posiciones de la matriz.

Nótese que la matriz asociada a un sistema escalonado es una matriz escalonada por filas.

Análogamente, se define el concepto de matriz escalonada por columnas.

Ejemplo 2.5.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así, para resolver un sistema de ecuaciones lineales $A \cdot X = B$ por el método de Gauss consideramos la matriz ampliada del sistema y mediante operaciones elementales "en las filas" buscamos una matriz en forma escalonada que se corresponderá con un sistema equivalente al de partida.

Ejemplo 2.5.2.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -5 \end{array}\right\}$$

Consideremos la matriz ampliada

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -5 \end{array}\right)$$

Apliquemos el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

La matriz escalonada que hemos obtenido se corresponde con el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ & & & & x_3 & = & -3 \end{array}\right\}$$

cuya solución es: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -3$.

Otra alternativa (método de Gauss-Jordan) es continuar realizando operaciones elementales sobre la última matriz hasta conseguir en la matriz de coeficientes que:

I) En las filas no nulas, el primer elemento no nulo tenga el valor 1; lo denominaremos cabecera.

II) En las columnas donde están situadas las cabeceras los restantes valores son nulos.

Ejemplo 2.5.3. I) En el ejemplo anterior y trabajando con la matriz escalonada que obtuvimos, nos quedaría:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim_{F_2+F_3,\ F_1+F_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim_{F_1-F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

llegaríamos a que la matriz ampliada es equivalente a

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

que corresponde al sistema $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -3$.

Como se observa la columna de términos independientes es directamente la solución del sistema.

II) El sistema no ha de tener necesariamente tantas ecuaciones como incógnitas. Por ejemplo,

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{array}\right\}$$

Su matriz ampliada es equivalente a

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2.6. Matrices invertibles

Sea A una matriz cuadrada de orden n sobre K. Diremos que A es **invertible o no singular** si existe otra matriz B del mismo orden tal que $A \cdot B = I_n = B \cdot A$.

Si A no es invertible se dice que es una **matriz singular**.

Proposición 2.6.1. *Si A y C son matrices cuadradas de orden n, se verifica:*

i) *Si A es invertible, su inversa es única (se denota por A^{-1} y se llama **matriz inversa** de A).*

ii) *Si A y C son invertibles, la matriz $A \cdot C$ es invertible y $(A \cdot C)^{-1} = C^{-1} \cdot A^{-1}$.*

iii) *Si A es invertible, su traspuesta también lo es y además $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.*

iv) *Si A es invertible, la matriz λA es invertible, para todo $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$. Además, $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$.*

Proposición 2.6.2. *Las matrices elementales son invertibles.*

Observación 2.6.3. *Sólo definimos matriz inversa para matrices cuadradas. No toda matriz cuadrada tiene inversa.*

Cálculo de la matriz inversa

i) Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

queremos calcular, si existe, su inversa. Esto equivale a encontrar una matriz B de orden 3×3 tal que $A \cdot B = I_3 = B \cdot A$. Se plantean 3 sistemas de ecuaciones lineales con la misma matriz de coeficientes asociada, la matriz A. En efecto, si

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

para que $A \cdot B = I_3$ tendremos que resolver:

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } A\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

¿Por qué no resolverlos simultáneamente?

Las operaciones elementales serán en los tres casos las mismas. Así, al transformar la matriz A en la identidad, las columnas de términos independientes serán las soluciones de cada sistema y, por lo tanto, serán las columnas de la inversa de A, siempre y cuando tal inversa exista.

II) Partiendo de la matriz A y realizando una serie de operaciones elementales en sus filas (columnas) la transformamos en la matriz I_n. Realizando las mismas operaciones elementales en la matriz I_n, la matriz resultante es la inversa de A.

Dada $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$ consideremos E^f la colección de transformaciones en filas y E^c las transformaciones en columnas. Entonces:

$$I_n = E^f(A) = F \cdot A, \text{ con } F = E^f(I_n).$$

$$I_n = E^c(A) = A \cdot C, \text{ con } C = E^c(I_n).$$

Para la matriz A anterior tendríamos:

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2-2F_1 \\ F_3-3F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{-(F_3-2F_2)3 \\ -F_2/2}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2+2F_3 \\ F_1+2F_3}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1/3 & 4/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 5/6 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1-3F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2/3 & -7/6 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 5/6 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

Por lo que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/3 & -7/6 & 4/3 \\ 1/3 & 5/6 & -2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

II. Determinantes

2.7. Definición y Propiedades

A cada matriz cuadrada A con coeficientes en K, le asociaremos un elemento de K llamado **determinante** de A, es decir, determinante será una aplicación $det : \mathcal{M}_n(K) \to K$. Nos servirá para caracterizar a las matrices invertibles y para resolver sistemas $A \cdot X = B$, en los que A es invertible. Daremos una definición recursiva de determinante de una matriz.

Definiremos, de forma inductiva, el concepto de determinante de una matriz cuadrada de la forma siguiente. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$ una matriz cuadrada con coeficientes en K.

- Si $n = 1$, $det(A) = a_{11}$,
- Sea $n \geq 2$ y supongamos definidos los determinantes de cualquier matriz de orden $n-1$. Se define para la matriz A de orden n:

$$det(A) := a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \tag{2.1}$$

  donde, para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, siendo Δ_{ij} el determinante de la submatriz de orden $n-1$ que resulta de suprimir en A la fila i-ésima y la columna j-ésima.

La expresión (2.1) se denomina **desarrollo de Laplace** del determinante por los elementos de la fila i-ésima.

La definición anterior no depende de la fila i que escojamos en la matriz, es decir:

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \ldots + a_{jn}A_{jn}, \quad \forall i, j.$$

El desarrollo del determinante también puede efectuarse sobre los elementos de una columna:

$$det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \tag{2.2}$$

La expresión (2.2) se denomina desarrollo de Laplace del determinante por los elementos de la columna j-ésima y, de nuevo, no depende de la columna que escojamos en A.

Para una matriz cuadrada de orden 2, $det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Para una matriz A de orden tres, desarrollando el determinante por la primera fila, se obtiene:

$$\begin{aligned} det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + \\ & a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ & -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

(Esta fórmula se conoce con el nombre de regla de Sarrus).

Ejemplo 2.7.1. $det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -2, \qquad det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$

Proposición 2.7.2. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Se verifica:*

I) $det(A) = det(A^t)$.

II) *Si la matriz A tiene una fila (o columna) donde todos los coeficientes son cero, su determinante es cero.*

III) *Si A es una matriz triangular (superior o inferior), entonces $det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.*

IV) *Si A es una matriz diagonal, entonces $det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.*

Demostración. La prueba de 1 se deduce de las expresiones (2.1) y (2.2). Para justificar 2 basta desarrollar el determinante por los elementos de esa fila o columna. La afirmación 3 se demuestra por inducción en n, desarrollando el determinante por los elementos de la primera columna (si A es triangular superior) o de la primera fila si A es triangular inferior. Finalmente, como consecuencia 3 de se deduce 4. □

2.8. Determinantes y operaciones elementales

En la sección 2.5 se estudió cómo transformar una matriz cuadrada A en una triangular T realizando operaciones elementales en sus filas. Puesto que sabemos que $det(T) = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}$, sería conveniente saber cómo le afecta cada operación elemental en las filas de A al cálculo de su determinante.

Proposición 2.8.1. *Sean A y B dos matrices cuadradas. Se verifica:*

$$det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$$

Proposición 2.8.2. *Sea A una matriz cuadrada. Se verifica:*

i) *Si se intercambian dos filas (o dos columnas) de A entonces su determinante cambia de signo.*

ii) *Si se multiplican los elementos de una fila (o columna) de A por un escalar λ, entonces su determinante queda multiplicado por λ.*

iii) *Si a una fila (o columna) de A se le suma otra fila (o columna) multiplicada por un escalar λ, entonces su determinante no varía.*

Demostración. Basta tener en cuenta la proposición 2.8.1 y el valor del determinante de las matrices elementales:

$$det(E_{ij}) = -1; \qquad det(E_i(\lambda)) = \lambda; \qquad det(E_{i+\lambda j}) = 1.$$

□

Corolario 2.8.3. i) *Si una matriz cuadrada A tiene dos filas (o columnas) iguales, su determinante vale cero.*

ii) *Si en la fila i de una matriz cuadrada A cada elemento $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$ es suma de dos, entonces*

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{ij}+c_{ij} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Demostración. Si A tiene dos filas iguales ($F_i = F_j$) y hacemos $F_i - F_j$, obtenemos una matriz A' con el mismo determinante que A y con una fila de ceros, así $det(A) = 0$.

Para demostrar la última propiedad, basta desarrollar el determinante por la fila i-ésima. □

Observación 2.8.4. *Si en una matriz A, una fila F_i (o columna) es una suma de mútiplos de otras filas (o columnas), es decir, $F_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j F_j$, su determinante es cero.*

Veamos un ejemplo de cómo estas propiedades facilitan el cálculo de determinantes.

Ejemplo 2.8.5. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =_{(F_3-2F_1)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =_{(F_4-2F_1)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -5 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{vmatrix} =_{(F_2+F_1)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & -6 \end{vmatrix} =_{(F_3+4F_1)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -3$$

2.9. Determinante y matriz inversa

Veremos cómo el determinante de una matriz nos permite saber cuándo dicha matriz es invertible y cómo permite calcular la matriz inversa.

Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$ una matriz cuadrada. La **matriz adjunta** de A, $Adj(A)$, es una matriz cuyos coeficientes son los adjuntos $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ de los elementos de A.

Teorema 2.9.1. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$. La matriz A es invertible si, y sólo si, $det(A) \neq 0$. Además*

$$A^{-1} = det(A)^{-1} \cdot Adj(A)^t$$

Demostración. Si A es invertible, sabemos que

$$det(A) \cdot det(A^{-1}) = det(I_n) = 1,$$

por lo que, necesariamente $det(A) \neq 0$ y $det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$.

Supongamos ahora que el determinante de A no es cero y demostremos que

$$C = A \cdot Adj(A)^t = det(A) \cdot I_n$$

Recordemos que en la posición (k, i) la matriz $Adj(A)^t$ tiene el coeficiente (i, k) de $Adj(A)$, que es el adjunto A_{ik} de A. De este modo, para cada i, $1 \leq i \leq n$, se tiene que:

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = det(A)$$

Si, ahora tomamos $i \neq j$, entonces:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{jk} = 0$$

puesto que se trata del determinante de la siguiente matriz, que tiene dos filas iguales

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

□

Observación 2.9.2. *Con el resultado anterior ya podemos garantizar que si B es una matriz cuadrada de orden n tal que $A \cdot B = I_n$ o $B \cdot A = I_n$, entonces, necesariamente A es invertible, siendo precisamente B la inversa de A.*

En efecto, si $A \cdot B = I_n$ entonces $det(A) \cdot det(B) = det(I_n) = 1$, así $det(A) \neq 0$ y, por tanto, es invertible. Entonces,

$$B = (A^{-1} \cdot A) \cdot B = A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot I_n = A^{-1}$$

Ejemplo 2.9.3. Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \text{ entonces } Adj(A) \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -7 & 5 & 4 \\ 8 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Puesto que $det(A) = 6 \neq 0$, la matriz A tiene inversa, que es:

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot Adj(A)^t = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -4 & -7 & 8 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & -7/6 & 4/3 \\ 1/3 & 5/6 & -2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

2.10. Regla de Cramer

Sea A una matriz cuadrada de orden n y sea $A \cdot X = B$ un sistema de ecuaciones lineales con matriz asociada A. Si $det(A) \neq 0$, entonces el sistema es compatible determinado y la solución única es X^t, siendo X :

$$X = A^{-1} \cdot B = det(A)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1i} & \cdots & A_{ni} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Demostración. Puesto que A tiene inversa, multiplicamos ambos términos de la igualdad $A \cdot X = B$ por A^{-1} y obtenemos $X = A^{-1} \cdot B$.

Por otra parte, si $(X_1)^t$ y $(X_2)^t$ son soluciones del sistema de ecuaciones lineales $A \cdot X = B$, entonces $A \cdot X_1 = A \cdot X_2$. Esto implica que, $X_1 = A^{-1} \cdot (A \cdot X_1) = A^{-1} \cdot (A \cdot X_2) = X_2$. $\square$

Teniendo en cuenta que

$$b_1 \cdot A_{1i} + b_2 \cdot A_{2i} + \cdots + b_n \cdot A_{ni} = det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

se tiene que, para cada índice $i = 1, \ldots, n$:

$$x_i = det(A)^{-1} \cdot det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.10.1. Resuelve por Cramer y por Gauss-Jordan el siguiente sistema en $\mathbb{Z}_7$:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 6y & + & 4z & = & 3 \\ 4x & + & 5y & + & 3z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & 5z & = & 5 \end{array}\right\}$$

Empecemos resolviéndolo por Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right) \sim_{F_2+3F_1,\ F_3-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \end{array}\right) \sim_{4F_2} \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \end{array}\right) \sim_{F_3-3F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim_{6F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim_{F_1+3F_3,\ F_2+3F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim_{F_1+F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Para resolverlo por Cramer, empezamos calculando el determinante de A.

$$det \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 25 + 36 + 16 - 40 - 3 - 120 = 5.$$

Entonces, la solución viene dada por:

$$x = 5^{-1} \cdot det \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot 4 = 5$$

$$y = 5^{-1} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot 3 = 2$$

$$z = 5^{-1} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot 0 = 0$$