Ejercicios del Tema 3.

I. Espacios Vectoriales

1. ¿Cuáles de los conjuntos siguiente son subespacios vectoriales del espacio correspondiente? Halla una base en aquellos que sean subespacios.

   a) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x = 1\}$

   b) $W = \left\{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_5)^3 \ \mid \ x = 0 \text{ ó } z = 0\right\}$

   c) $W = \{(x, y, z, t) \in (\mathbb{Z}_7)^4 \ \mid \ x + y + z = 0,\ 2t + y = 0\}$

   d) $W = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7) \mid 3a + 2b + 5c = 0\right\}$

2. Estudia si $\{(2, 3, 4), (1, 0, 3), (0, 1, 4)\} \subseteq (\mathbb{Z}_5)^3$ es un conjunto de vectores libre de $(\mathbb{Z}_5)^3$.

3. Calcula α, $\beta \in \mathbb{Z}_{11}$ tales que $\alpha(3, 7, 6) + \beta(2, 5, 1) = (5, 5, 4) \in (\mathbb{Z}_{11})^3$.

4. Calcula los valores de $m \in \mathbb{Z}_{11}$ para que el conjunto $\{(0, 3, m), (5, m, 3), (10, 9, 0)\} \subseteq (\mathbb{Z}_{11})^3$ sea un conjunto ligado.

5. En $(\mathbb{Z}_7)^3$ se consideran los subespacios vectoriales

   $$U = \{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_7)^3 \mid x = 0\} \text{ y } W = \langle\{(1, 1, 1), (1, 2, 3)\}\rangle.$$

   Calcula una base del subespacio vectorial $U \cap W$.

6. Calcula una base para cada uno de los subespacios vectoriales siguientes:

   a) $W = \left\{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_5)^3 \mid x + y + 3z = 0 \ \wedge \ 2x + y = 0\right\}$,

   b) $W = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3) \mid a + 2d = 0 \ \wedge \ b + d = 0\right\}$.

7. Sean $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y los vectores $\vec{w}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_3$, $\vec{w}_2 = \vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$. Calcula un vector $\vec{w}_3$ tal que $B' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ sea otra base de $\mathbb{R}^3$ y el vector $\vec{w} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$ tenga coordenadas $[\vec{w}]_{B'} = (1, -1, 1)^t$.

8. Sea U el subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definido por

   $$U = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + b + 2c = 0, 2a - b + c + 3d = 0, b + c - d = 0, a + c + d = 0\right\}$$

   a) Calcula una base B de U.

   b) Comprueba que $M = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ es un elemento de U.

   c) Calcula las coordenadas de M en la base B.

9. Calcula las ecuaciones de cada uno de los siguientes subespacios:

   a) $W_1 = \langle\{(1, 3, 0), (2, 4, 1)\}\rangle \subseteq (\mathbb{Z}_5)^3$

   b) $W_2 = \langle\{(2, 3, 5), (1, 4, 3), (0, 4, 5)\}\rangle \subseteq (\mathbb{Z}_7)^3$

   c) $W_3 = \langle\{(1, 3, 2)\}\rangle \subseteq (\mathbb{Z}_5)^3$

   d) $W_4 = \langle\left\{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}\rangle \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$

10. En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios

$$U = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a + d = b = 0\} \qquad V = \{A; A + A^t = 0\}.$$

Halla la dimensión y una base de U, V y $U \cap V$.

11. Sea $\{(1, 2, a), (1, 2, 1), (b, 0, 1)\}$ un subconjunto de vectores de $(\mathbb{Z}_3)^3$:

    a) Calcula a y b en $\mathbb{Z}_3$ para que los tres vectores sean linealmente independientes.

    b) Halla a y b en $\mathbb{Z}_3$ para que el subespacio que generan tenga dimensión 1.

    c) Para $b = 2$, halla una base y las ecuaciones del subespacio generado por ellos.

12. Calcula el rango de cada una de las matrices siguientes:
    - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$
    - $\begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_5)$ según valores de $a, b \in \mathbb{Z}_5$.

13. Sean $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y $B = \{(3, 5, 1), (2, 6, 5), (1, 0, 3)\}$ dos bases de $(\mathbb{Z}_7)^3$. Calcula las matrices de cambio de base M_{BC} y M_{CB} .

14. Sea $B = \{(1, 3, 0), (2, 3, 4), (1, 0, 2)\}$ una base de $(\mathbb{Z}_7)^3$. Sabiendo que las coordenadas de $\vec{v} \in (\mathbb{Z}_7)^3$ respecto a la base B son $[\vec{v}]_B = (1\ 3\ 4)^t$. Calcula las coordenadas de $\vec{v}$ respecto a la base canónica de $(\mathbb{Z}_7)^3$.

15. Si las coordenadas de $\vec{v} \in (\mathbb{Z}_7)^3$ respecto a la base canónica son $[\vec{v}]_C = (3\ 5\ 4)^t$. Calcula las coordenadas de $\vec{v}$ respecto a la base

$$B = \{(1, 3, 0), (2, 3, 4), (1, 0, 2)\}$$

16. Comprueba que

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base del $\mathbb{Z}_5$-espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$.

Si denotamos por C la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$, calcula las coordenadas del vector $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ respecto a la base B sabiendo que $[A]_C = (4\ 0\ 4\ 1)^t$.

Si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ tiene coordenadas $(1\ 1\ 0\ 2)^t$ respecto a la base B, calcula las coordenadas de M respecto a la base canónica.

17. Estudia la existencia de soluciones del sistema siguiente en función de los valores de a y b $(a, b \in \mathbb{R})$. Halla las soluciones cuando existan.

$$\begin{cases} ax \phantom{{}+2y} + 2z = 2 \\ 5x + 2y = 1 \\ x - 2y + bz = 3 \end{cases}$$

18. Halla los valores de a y b para que el conjunto de soluciones del siguiente sistema sea un subespacio vectorial de dimensión 2 en $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - az = 0 \\ x - y - z = b \end{cases}$$

II. Aplicaciones Lineales

1. Estudia si cada una de las aplicaciones siguientes es una aplicación lineal o no:

   a) $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3) \to \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{Z}_3)$ definida por $f(A) = A \cdot B$, para cada $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$, siendo $B = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{Z}_3)$ fija.

   b) $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ definida por $f(A) = A + B$, para cada $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$, siendo $B = \left(\begin{smallmatrix}1&3\\2&4\end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ fija.

   c) $f : (\mathbb{Z}_7)^3 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$ definida por $f(x, y, z) = \left(\begin{smallmatrix}x+y&z\\z&x\end{smallmatrix}\right)$, para cada $(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_7)^3$.

2. Sea $f : (\mathbb{Z}_7)^3 \to (\mathbb{Z}_7)^3$ la aplicación lineal tal que

$$f(2, 0, 0) = (1, 3, 5),\ f(2, 1, 0) = (0, 1, 1),\ f(0, 0, 1) = (2, 2, 2).$$

   a) Demuestra que f es un isomorfismo.

   b) Calcula la matriz asociada a f respecto a las bases canónicas.

   c) Calcula la expresión general de f, $f(x, y, z)$.

3. Sea $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ la aplicación lineal definida por

$$f(A) = A \cdot M + 2M \cdot A, \text{ para cada } A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$$

donde $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Halla una base y las ecuaciones de $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

4. Define, cuando sea posible, las aplicaciones siguientes:

   a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{Ker}(f) = \langle\{(1, 1, 1)\}\rangle$ y $(0, 2) \in \mathrm{Im}(f)$

   b) $g : (\mathbb{Z}_3)^3 \to (\mathbb{Z}_3)^2$ tal que $\mathrm{Ker}(g) = \{(0, 0, 0)\}$

   c) $h : (\mathbb{Z}_7)^3 \to (\mathbb{Z}_7)^3$ tal que $\mathrm{Ker}(h) = \{(0, 0, 0)\}$ y $(0, 2, 1) \in \mathrm{Im}(h)$

   d) $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ tal que $\mathrm{Ker}(f) = \langle\{(1, 4, 2), (1, 4, 3)\}\rangle$ y $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$

5. Sea $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$ la aplicación lineal definida por

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 3d & b + 3c \\ d + 5c & 3a + 2b \end{pmatrix}.$$

   Halla la matriz asociada a f respecto a las bases canónicas. Halla una base de $\mathrm{Im}(f)$ y otra de $\mathrm{Ker}(f)$.

6. Sea $f : (\mathbb{Z}_5)^4 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto a las bases canónicas es

$$M_{C_4C_3}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & b \\ 1 & a & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   a) Halla los valores de $a, b \in \mathbb{Z}_5$ tales que $(1, 0, 0, 1) \in \mathrm{Ker}(f)$, y f es sobreyectiva.

   b) Para $a = b = 0$, halla $f(4, 2, 1, 0)$ y $f^{-1}(\{(0, 1, 0)\})$.

   c) Sea $B = \{(1, 0, 1), (4, 0, 2), (0, 1, 0)\}$ otra base de $(\mathbb{Z}_5)^3$. Calcula $M_{CB}(f)$ en el caso $a = b = 0$.

7. Sea $f : (\mathbb{Z}_7)^2 \to (\mathbb{Z}_7)^3$ una aplicación lineal cuya matriz asociada respecto a las respectivas bases canónicas es $M_{C_2C_3}(f) = \begin{pmatrix} 4 & a \\ a & 1 \\ 4 & a \end{pmatrix}$.

- Calcula los valores de $a \in \mathbb{Z}_7$ para los cuales f es inyectiva.
- Halla las ecuaciones de $\mathrm{Ker}(f)$ para $a = 2$.

8. Dadas las aplicaciones lineales

$$\begin{aligned} f &: (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^3 \quad \text{con} \quad f(x,y,z) = (x+y, y, z), \text{ y} \\ g &: (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^3 \quad \text{con} \quad g(x,y,z) = (y, x, z+2y), \end{aligned}$$

y las bases de $(\mathbb{Z}_5)^3$

$$B_1 = \{(1,1,0),(2,0,3),(4,1,2)\}, \text{ y } B_3 = \{(1,1,4),(1,4,1),(0,1,2)\}.$$

Halla la matriz $\mathcal{M}_{B_1B_3}(f \circ g)$ y comprueba que coincide con el producto de las matrices asociadas a f y a g, tomando como base intermedia C_3, la base canónica de $(\mathbb{Z}_5)^3$.

9. Halla la matriz $M_{BB}(f)$ asociada al homomorfismo $f : (\mathbb{Z}_{11})^3 \to (\mathbb{Z}_{11})^3$ determinado por

$$f(\vec{v_1}) = \vec{v_1} + \vec{v_3}, f(\vec{v_2}) = 2\vec{v_1} + 10\vec{v_2}, \quad \mathrm{Ker}\,(f) = < \{\vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3}\} >,$$

siendo $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ una base de $(\mathbb{Z}_{11})^3$.

   a) Calcula $f^{-1}(\{8\vec{v_1} + 8\vec{v_2} + 2\vec{v_3}\})$

   b) Calcula una base y las ecuaciones de $\mathrm{Im}(f)$ en función de B.

10. Sean $C_3 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal definida por $f(\vec{e_1}) = 2\vec{e_1},\ f(\vec{e_2}) = \vec{e_1} + \vec{e_2} + a\vec{e_3},\ f(\vec{e_3}) = \vec{e_1} + b\vec{e_2} + a\vec{e_3}$, con a, $b \in \mathbb{R}$.

    a) Calcula los valores de a y de b para los que f no es inyectiva.

    b) Para el valor de a obtenido en el apartado anterior, calcula, en función de b, la dimensión, una base y las ecuaciones de $\mathrm{Im}\,(f)$ y $\mathrm{Ker}\,(f)$.

11. Sea $f : (\mathbb{Z}_7)^4 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$ la aplicación lineal definida por

$$f(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} d+c & a \\ 0 & b+a \end{pmatrix}, \text{ para todo } (a,b,c,d) \in (\mathbb{Z}_7)^4.$$

Denotemos por C y C' las bases canónicas de $(\mathbb{Z}_7)^4$ y $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$, respectivamente.

    a) Calcula $M_{CC'}(f)$

    b) Calcula una base y las ecuaciones de $\mathrm{Ker}(f)$.

    c) Calcula $f^{-1}(\{A\})$ siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$

12. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal tal que

$$f(1,0,0,0) = (1,0,0),\ f(0,0,0,1) = (0,0,1),\ \text{y}$$

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z = 0, z+t = 0\}$$

    a) Halla la matriz de f respecto a las bases canónicas.

    b) Calcula la dimensión, una base y las ecuaciones de $\mathrm{Im}(f)$.

    c) Halla el conjunto $f^{-1}(\{(1,0,2)\})$.

    d) Si $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x = y\}$, halla $f(W)$, el espacio imagen de W.