Tema 3

Espacios Vectoriales y Aplicaciones Lineales

I. Espacios vectoriales

3.1. Definiciones

Consideremos $K = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{Z}_p$ con p un número primo. Para cada uno de estos conjuntos conocemos dos operaciones, una operación **suma** $(+ : K \times K \to K)$ y una operación **producto** (denotada por $\cdot : K \times K \to K$). Estas operaciones verifican las siguientes propiedades:

- Asociativa: para cualesquiera α, β, $\gamma \in K$ se verifica

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma), \qquad (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma).$$

- Existe $0 \in K$ tal que $0 + \alpha = \alpha = \alpha + 0$, $\forall \alpha \in K$.

  Existe $1 \in K$ tal que $1 \cdot \alpha = \alpha = \alpha \cdot 1$, $\forall \alpha \in K$.

- Para cada $\alpha \in K$ existe el elemento $-\alpha \in K$ (llamado el elemento *opuesto* de α para la suma) tal que $\alpha + (-\alpha) = 0 = (-\alpha) + \alpha$.

  Para cada $\alpha \in K - \{0\}$ existe el elemento $\alpha^{-1} \in K$ (llamado el elemento *inverso* de α para el producto) tal que $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1 = \alpha^{-1} \cdot \alpha$.

- Conmutativa: para cualesquiera α, $\beta \in K$ se verifica

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha, \qquad \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha.$$

- Distributiva del producto respecto a la suma: para cualesquiera $\alpha, \beta, \gamma \in K$ se verifica

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma, \quad \text{y } (\beta + \gamma) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha.$$

A los elementos de K se les llama **escalares**.

Consideremos, también, un conjunto no vacío V (cuyos elementos llamaremos **vectores**).

Definición 3.1.1. Se dice que V es un *espacio vectorial sobre* K o un K-*espacio vectorial* si:

i) Existe una función $+ : V \times V \to V$, llamada **operación suma en** V, verificando las siguientes propiedades:

  - Asociativa: $(\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w})$, para todos $\vec{v}$, $\vec{u}$, $\vec{w} \in V$.
  - Existe $\vec{0} \in V$ tal que $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v} = \vec{0} + \vec{v}$, para todo $\vec{v} \in V$.
  - Para cada $\vec{v} \in V$, existe un elemento $\vec{w} \in V$ (llamado el vector opuesto de $\vec{v}$), tal que $\vec{v} + \vec{w} = \vec{0} = \vec{w} + \vec{v}$. El opuesto de $\vec{v}$ se representa por $-\vec{v}$.
  - Conmutativa: $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$, para todos $\vec{v}$, $\vec{u} \in V$.

ii) Existe otra función $\cdot\ : K \times V \to V$, llamada **producto por escalares**, tal que:

  a) $(\alpha + \beta) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{v}$
  b) $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$
  c) $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{v}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{v}$
  d) $1_K \cdot \vec{v} = \vec{v}$

  para todos los vectores $\vec{u}, \vec{v} \in V$ y todos los escalares $\alpha, \beta \in K$.

(Por comodidad, omitiremos escribir el $\cdot$ correspondiente a las operaciones producto y producto por escalares).

Proposición 3.1.2. *Si V es un K-espacio vectorial, se verifican las siguientes propiedades:*

i) *Dados $\alpha \in K$ y $\vec{v} \in V$, se tiene que*

$$\alpha \cdot \vec{v} = \vec{0} \Longleftrightarrow \alpha = 0 \text{ o } \vec{v} = \vec{0}.$$

ii) *Dados $\alpha \in K$ y $\vec{v} \in V$, se tiene que*

$$(-\alpha) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot (-\vec{v}) = -(\alpha \cdot \vec{v}).$$

iii) *Dados $\alpha, \beta \in K$ y $\vec{u} \neq \vec{0} \in V$, se tiene que si $\alpha \cdot \vec{u} = \beta \cdot \vec{u}$, entonces $\alpha = \beta$.*

iv) *Dados $\alpha \neq 0 \in K$ y $\vec{u}, \vec{v} \in V$, se tiene que si $\alpha \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{v}$, entonces $\vec{u} = \vec{v}$.*

Demostración. i) "$\Leftarrow$"

Si $\alpha = 0$, se tiene que $0\vec{v} = (0+0)\vec{v} = 0\vec{v} + 0\vec{v}$ y como cada vector en V tiene su vector opuesto, existe $-(0\vec{v}) \in V$ que podemos sumar a la igualdad anterior obteniéndose que

$$\vec{0} = 0\vec{v} + (-(0\vec{v})) = [0\vec{v} + 0\vec{v}] + (-(0\vec{v})) = 0\vec{v} + [0\vec{v} + (-(0\vec{v}))] = 0\vec{v} + \vec{0} = 0\vec{v}.$$

Análogamente, si $\vec{v} = \vec{0}$, se tiene que $\alpha\vec{0} = \alpha(\vec{0} + \vec{0}) = \alpha\vec{0} + \alpha\vec{0}$; al igual que en el caso anterior

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \alpha\vec{0} + (-(\alpha\vec{0})) = [\alpha\vec{0} + \alpha\vec{0}] + (-(\alpha\vec{0})) \\ &= \alpha\vec{0} + [\alpha\vec{0} + (-(\alpha\vec{0}))] = \alpha\vec{0} + \vec{0} = \alpha\vec{0}\end{aligned}$$

"$\Rightarrow$"

Si $\alpha = 0$, no hay nada que probar. Supongamos entonces que $\alpha \neq 0$.

Para $\alpha \in K - \{0\}$ existe $\alpha^{-1} \in K$, como $\alpha\vec{v} = \vec{0}$ se tiene que

$$\vec{0} = \alpha^{-1}\vec{0} = \alpha^{-1}(\alpha\vec{v}) = (\alpha^{-1}\alpha)\vec{v} = 1\vec{v} = \vec{v}$$

ii) Por un lado $(-\alpha)\vec{v} = -(\alpha\vec{v})$, puesto que

$$(-\alpha)\vec{v} + \alpha\vec{v} = \alpha\vec{v} + (-\alpha)\vec{v} = (\alpha + (-\alpha))\vec{v} = 0\vec{v} = \vec{0};$$

por otro lado $\alpha(-\vec{v}) = -(\alpha\vec{v})$, puesto que

$$\alpha(-\vec{v}) + \alpha\vec{v} = \alpha\vec{v} + \alpha(-\vec{v}) = \alpha(\vec{v} + (-\vec{v})) = \alpha\vec{0} = \vec{0},$$

luego $(-\alpha)\vec{v} = -(\alpha\vec{v}) = \alpha(-\vec{v})$. Por tanto, escribiremos $-\alpha\vec{v}$ para denotar el opuesto del vector $\alpha\vec{v} \in V$.

iii) Si $\alpha\vec{u} = \beta\vec{u}$ entonces $\vec{0} = \alpha\vec{u} + (-\beta\vec{u}) = (\alpha + (-\beta))\vec{u}$ y como $\vec{u} \neq \vec{0}$ se tiene que $\alpha = \beta$.

iv) Si $\alpha\vec{u} = \alpha\vec{v}$ entonces $\vec{0} = \alpha\vec{u} + (-\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} + (-\vec{v}))$ y como $\alpha \neq 0$ se tiene que $\vec{u} = \vec{v}$.

$\square$

Ejemplo 3.1.3. Los siguientes conjuntos tienen estructura de K-espacio vectorial con las operaciones usuales:

i) $K^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \; ; \; x_i \in K\}$.

ii) $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ es el espacio vectorial de las matrices con m filas y n columnas y coeficientes en K.

iii) El conjunto $\mathcal{A}(K, K) = K^K = \{f : K \to K \; ; \; f \text{ es aplicación}\}$.

3.2. Subespacios vectoriales

Definición 3.2.1. Sea V un K-espacio vectorial. Si $U \subseteq V$ es un subconjunto no vacío de V, se dice que U es un **subespacio vectorial** de V, si U es un espacio vectorial sobre K considerando en U las mismas operaciones definidas en V.

Proposición 3.2.2. *Sea $U \subseteq V$ un subconjunto no vacío de V, son equivalentes:*

i) *U es un subespacio vectorial de V.*

ii) *Dados $\vec{u}, \vec{u'} \in U$ y $\alpha \in K$, se tiene que $\vec{u} + \vec{u'} \in U$ y $\alpha\vec{u} \in U$.*

iii) *Dados $\vec{u}, \vec{u'} \in U$ y $\alpha, \beta \in K$, se tiene que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{u'} \in U$.*

Ejemplo 3.2.3. i) En $\mathbb{R}^3$, se considera el conjunto:

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; 2x - 3y = 0 \; , \; x + 2z = 0\right\}.$$

U es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

ii) En el punto anterior, $U \subseteq \mathbb{R}^3$ es el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo

$$\left.\begin{array}{ccccc} 2x & - & 3y & & = 0 \\ x & & & + \; 2z & = 0 \end{array}\right\}$$

En general, en K^n, se tiene que el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo es siempre un subespacio vectorial:

$$U = \{(x_1, \ldots, x_n) \in K^n \; ; \; A(x_1 \; \ldots \; x_n)^t = (0 \; \ldots \; 0)^t\},$$

siendo $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

Más adelante, veremos que cualquier subespacio vectorial de K^n es de este tipo.

III) El conjunto $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2\left(\mathbb{Z}_5\right) \ ; \ 2a+b+c=0 \right\}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2\left(\mathbb{Z}_5\right)$.

IV) *Si $U, W \subseteq V$ son dos subespacios vectoriales de V, también lo es $U \cap W$ y, en general, no lo es $U \cup W$.*

Por ejemplo

$$\begin{aligned} U &= \left\{ (x,y,z) \in \left(\mathbb{Z}_7\right)^3 \ ; \ x=0, y+z=0 \right\}, \text{ y} \\ W &= \left\{ (x,y,z) \in \left(\mathbb{Z}_7\right)^3 \ ; \ y=z=0 \right\} \end{aligned}$$

son subespacios vectoriales de $\left(\mathbb{Z}_7\right)^3$, sin embargo $U \cup W$ no lo es pues

$$\begin{gathered} (0,3,4) \in U \subset U \cup W, \ (1,0,0) \in W \subset U \cup W \\ \text{pero } (0,3,4)+(1,0,0) = (1,3,4) \notin U \cup W. \end{gathered}$$

3.3. Dependencia e Independencia Lineal

Definición 3.3.1. Sea V un K-espacio vectorial y sea $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ un subconjunto cualquiera de vectores de V. Una **combinación lineal** de los vectores de S es un vector $\vec{v}$ que se escribe como

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{v}_p = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\vec{v}_i$$

donde $\alpha_i \in K$.

Ejemplo 3.3.2. I) El vector $\vec{0} \in V$ es combinación lineal de cualquier conjunto $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ de vectores de V

$$\vec{0} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \cdots + 0\vec{v}_p$$

II) En $\left(\mathbb{Z}_7\right)^3$, se tiene que el vector $(3,1,5)$ es combinación lineal de los vectores de $S = \{(2,1,0),(1,2,6)\}$, puesto que

$$(3,1,5) = 4(2,1,0) + 2(1,2,6)$$

III) En $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ el vector $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de los vectores del conjunto $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, ya que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposición 3.3.3. *Sea V un K-espacio vectorial y S un subconjunto de V no vacío.*

I) *El conjunto de las combinaciones lineales de los vectores de S es un subespacio vectorial de V llamado* **subespacio generado** *por S y se denota $\langle S \rangle$.*

II) *$\langle S \rangle$ es el menor subespacio vectorial de V que contiene a S.*

Definición 3.3.4. Sean $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ y $T = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_r\}$ dos subconjuntos de vectores de un mismo K-espacio vectorial V. Diremos que S y T son **equivalentes** si $\langle S \rangle = \langle T \rangle$.

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$, se tiene que

$$\langle \{(0,0,1),(0,1,0)\} \rangle = \langle \{(0,1,1),(0,1,-1)\} \rangle = \{(0,y,z)\ ;\ y,z \in \mathbb{R}\}.$$

Esta relación es una relación de equivalencia en $\{S \subseteq V\ ;\ |S| \text{ es finito}\}$.

Definición 3.3.5. Sea $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ un conjunto de vectores de un K-espacio vectorial V, diremos que S es un **conjunto de generadores de** V si $V = \langle S \rangle$; es decir, todo vector de V es combinación lineal de los elementos de S.

Definición 3.3.6. Sea $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ un conjunto de vectores de V. Diremos que:

I) S es un conjunto **libre** o **linealmente independiente** si se tiene que:

$$\text{si } \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{v}_i = \alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_p \vec{v}_p = \vec{0}, \text{ entonces } \alpha_i = 0, \text{ para todo } i.$$

II) S es un conjunto **ligado** o **linealmente dependiente** si existe una combinación lineal de los vectores de S tal que

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{v}_i = \alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_p \vec{v}_p = \vec{0},$$

donde algún $\alpha_i \neq 0$.

Ejemplo 3.3.7. I) *En* $\mathbb{R}^3$*, el conjunto de vectores*

$$S_1 = \{(1,1,0),(2,1,-1),(3,2,-1)\} \text{ es ligado}$$

y el conjunto de vectores

$$S_2 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \text{ es libre.}$$

Para obtener escalares $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$a(1,1,0) + b(2,1,-1) + c(3,2,-1) = (0,0,0),$$

tenemos que encontrar una solución del sistema lineal homogéneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuya matriz de coeficientes tiene por columnas a los vectores del conjunto S_1. Si resolvemos el sistema anterior, se obtiene que éste es equivalente al sistema escalonado

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuyo conjunto de soluciones es

$$\{(-c,-c,c), c \in \mathbb{R}\}.$$

Basta dar un valor a c para obtener una combinación lineal de los vectores de S_1, con escalares no nulos, de forma que dicha combinación lineal es $\vec{0} \in \mathbb{R}^3$. Por ejemplo, si $c = -1$

$$(1,1,0) + (2,1,-1) + (-1) \cdot (3,2,-1) = (0,0,0).$$

De modo análogo, para comprobar que S_2 es un conjunto de vectores libre, se plantea el problema de calcular escalares $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = (0,0,0);$$

es decir, hemos de resolver el sistema lineal homogéneo cuya matriz de coeficientes tiene por columnas a los vectores del conjunto S_2:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Este sistema es, obviamente, un sistema compatible determinado cuya única solución es la trivial, es decir $a = b = c = 0$.

II) *En* $(\mathbb{Z}_5)^3$, *el conjunto de vectores*

$$\{(1,1,0),(1,0,2),(0,3,4)\} \text{ es linealmente dependiente}$$

y el conjunto de vectores

$$\{(1,1,0),(1,0,2),(1,0,1)\} \text{ es linealmente independiente.}$$

III) *En* $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$, *el conjunto de vectores*

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right\} \text{ es ligado}$$

y el conjunto de vectores

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\} \text{ es un conjunto libre.}$$

Proposición 3.3.8. *El conjunto de vectores S es libre si, y sólo si, ningún vector de S es combinación lineal de los demás. Equivalentemente, S es ligado si, y sólo si, algún vector de S es combinación lineal de los demás.*

Demostración. Supongamos que el vector $\vec{v}_j$ es combinación lineal de los otros: $\vec{v}_j = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \alpha_i \vec{v}_i$, entonces

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \alpha_i \vec{v}_i - \vec{v}_j = \vec{0}$$

luego S no es libre.

Recíprocamente, dada $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0}$ si algún $\alpha_j \neq 0$, existe α_j^{-1} (por las propiedades de K), así

$$\vec{v}_j = -\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \alpha_j^{-1} \alpha_i \vec{v}_i$$

es decir $\vec{v}_j$ es combinación lineal de los demás vectores de S. $\square$

Ejemplo 3.3.9. I) En $\mathbb{R}^3$, los vectores $\{(1,1,0),(2,1,-1),(3,2,-1)\}$ forman un conjunto ligado pues

$$(1,1,0)=(-1)(2,1,-1)+1(3,2,-1)$$

II) En $(\mathbb{Z}_5)^3$, los vectores $\{(1,1,0),(1,0,2),(0,3,4)\}$ forman un conjunto ligado porque

$$(0,3,4)=3(1,1,0)+2(1,0,2)$$

III) En $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ los vectores

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right\}$$

forman un conjunto ligado porque

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Proposición 3.3.10. *Sean $S=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_p\}$ y $T=\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\ldots,\vec{w}_r\}$ dos conjuntos de vectores en V. Se verifica que:*

I) *S y T son equivalentes si, y sólo si, cada vector de S es combinación lineal de los vectores de T y viceversa ($S\subseteq\langle T\rangle$ y $T\subseteq\langle S\rangle$).*

II) *Si S es libre y $\vec{v}\notin\langle S\rangle$, entonces $S\cup\{\vec{v}\}$ es libre.*

Demostración. II) Supongamos que existen α,α_i (con $i=1,\ldots,p$) tales que

$$\alpha\vec{v}+\alpha_1\vec{v}_1+\cdots+\alpha_p\vec{v}_p=\vec{0}.$$

Es claro que $\alpha=0$ ya que, en otro caso $\vec{v}\in\langle S\rangle$. Entonces

$$\alpha_1\vec{v}_1+\cdots+\alpha_p\vec{v}_p=\vec{0},$$

con lo que concluimos que todos los escalares $\alpha_i=0$, ya que S es libre. □

3.4. Bases y Dimensión

Definición 3.4.1. Un conjunto de vectores $B=\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n\}$ de un K-espacio vectorial V es una **base** de V si B es un conjunto libre y de generadores de V.

Se puede comprobar que todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de vectores. A este número de vectores n lo llamaremos **dimensión de** V y lo denotaremos $\dim(V)=n$.

Ejemplo 3.4.2. I) En K^n, el conjunto

$$C_n = \{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\}$$

es una base (llamada **base canónica** de K^n), $\dim(K^n) = n$.

II) En $\mathcal{M}_{2\times 3}(K)$, el conjunto formado por las matrices:

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

es una base (llamada base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 3}(K)$), $\dim(\mathcal{M}_{2\times 3}(K)) = 6$.

III) En general, en $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$, el conjunto formado por las matrices:

$$\{U_k^r\ ;\ k = 1,\ldots,m \text{ y } r = 1,\ldots,n\}$$

donde

$$(U_k^r)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ y } j = r \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

es la base canónica de $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$, $\dim(\mathcal{M}_{m\times n}(K)) = m\cdot n$

Teorema 3.4.3. *Sea $B = \{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p\} \subseteq V$. Son equivalentes:*

I) *B es una base de V.*

II) *Cualquier vector de V se escribe de* manera única *como combinación lineal de los vectores de la base de B.*

Demostración. Sea $\vec{v} \in V$ un vector cualquiera de V. Como $B = \{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p\}$ es base de V, en particular $V = \langle B\rangle$, por tanto existen escalares α_1, α_2, …, $\alpha_p \in K$ tales que

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{v}_p$$

Además, estos escalares son únicos puesto que si β_1, β_2, …, $\beta_p \in K$ son tales que

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{v}_p = \beta_1\vec{v}_1 + \beta_2\vec{v}_2 + \cdots + \beta_p\vec{v}_p$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\vec{0} &= (\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{v}_p) - (\beta_1\vec{v}_1 + \beta_2\vec{v}_2 + \cdots + \beta_p\vec{v}_p)\\ &= (\alpha_1 - \beta_1)\,\vec{v}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\,\vec{v}_2 + \cdots + (\alpha_p - \beta_p)\,\vec{v}_p\end{aligned}$$

y como B es un conjunto libre $\alpha_i - \beta_i = 0$, para $i = 1,2,\ldots,p$, es decir $\alpha_i = \beta_i = 0$, para $i = 1,2,\ldots,p$.

Recíprocamente, si cualquier vector de V se escribe de manera única como combinación lineal de los vectores de la base de B, se tiene que $V = \langle B\rangle$. Falta comprobar, por tanto, que B es un conjunto libre. Supongamos que existen escalares α_1, α_2, …, $\alpha_p \in K$ tales que

$$\vec{0} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{v}_p$$

como también $\vec{0} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \cdots + 0\vec{v}_p$ se concluye que $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, p$. $\square$

Definición 3.4.4. Sea $\vec{v} \in V$ y $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$ una base de V. Si

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{v}_p,$$

los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ se llaman **coordenadas del vector** $\vec{v}$ respecto a la base B. Denominaremos matriz de coordenadas del vector $\vec{v}$ respecto a la base B a la matriz columna o de orden $p \times 1$ a

$$[\vec{v}]_B = (\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_p)^t.$$

Teorema 3.4.5. *Sea V un espacio vectorial y sean $L \subseteq G \subseteq V$ dos conjuntos de vectores, siendo L libre y G de generadores. Siempre se puede encontrar una base B de V tal que $L \subseteq B \subseteq G$.*

Demostración. En el conjunto

$$\Phi = \{L' \text{ libre}\ ;\ L \subseteq L' \subseteq G\}$$

tomemos B de mayor cardinal (nótese que $|G|$ es finito). Para que B sea un base de V, falta ver que $V = \langle B\rangle$. Sea $\vec{v} \in G$. Si $\vec{v} \notin \langle B\rangle$, entonces $B \cup \{\vec{v}\}$ es un conjunto libre y además es un elemento de Φ. Sin embargo, $|B \cup \{\vec{v}\}| = |B| + 1 > |B|$, lo cuál es una contradicción. Así pues, se tiene que $G \subseteq \langle B\rangle$ y, por lo tanto, $V = \langle G\rangle \subseteq \langle B\rangle$. $\square$

Corolario 3.4.6. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea L un conjunto de vectores libre. Existe B base de V de modo que $L \subseteq B$.*

Demostración. Considerando B' una base de V, basta aplicar el Teorema 3.4.5 con $G = L \cup B'$. $\square$

Proposición 3.4.7. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $S \subseteq V$ un conjunto finito de vectores. Se verifica que:*

i) *Si S es libre, entonces $|S| \leq n$.*

ii) *Si S es un conjunto de generadores de V, entonces $|S| \geq n$.*

iii) *Si S es libre y $|S| = n$, S es una base de V.*

iv) *Si S es un conjunto de generadores de V y $|S| = n$, S es una base de V.*

Demostración. I) Si S es libre, existe una base B de V tal que $S \subseteq B$, por lo que $|S| \leq |B| = \dim(V) = n$.

II) Si S es un conjunto de generadores de V, entonces por el teorema 3.4.5, existe B base de V tal que $B \subseteq S$, con lo que $|S| \geq |B| = n$.

III) Si S es libre y $|S| = n$, sea B una base de V tal que $S \subseteq B$ (Corolario 3.4.6). Como $|S| = n = |B|$, se tiene que $S = B$.

IV) Si S es un conjunto de generadores de V y $|S| = n$, sea B una base de V tal que $B \subseteq S$ (Teorema 3.4.5). Como $|B| = n = |S|$, se tiene que $S = B$.

$\square$

3.5. Rango de vectores y rango de una matriz

Definición 3.5.1. Sea S un conjunto de vectores de un K-espacio vectorial V de dimensión finita. Se denomina **rango** de S a $dim(\langle S \rangle)$, es decir, el rango de S es el mayor número de vectores linealmente independientes que hay dentro de S.

Definición 3.5.2. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y sean $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_m\} \subseteq K^n$ las filas de A y $\{\vec{C}_1, \vec{C}_2, \ldots, \vec{C}_n\} \subseteq K^m$ las columnas de A. Llamaremos **rango por filas** de A a $rango(\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_m\}) \leq m$ y **rango por columnas** de A a $rango(\{\vec{C}_1, \vec{C}_2, \ldots, \vec{C}_n\}) \leq n$.

Teorema 3.5.3. *Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, entonces:*

$$rango_{filas}(A) = rango_{columnas}(A) := rango(A) \leq min(m,n)$$

Corolario 3.5.4. *Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, entonces: $rango(A) = rango(A^t)$.*

Teorema 3.5.5. *El rango de una matriz no se modifica haciendo operaciones elementales en las filas (o las columnas) de A.*

Demostración. El resultado es claro ya que:

I) $\langle\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_n\}\rangle = \langle\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_j \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_n\}\rangle$

II) $\langle\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_n\}\rangle = \langle\{\vec{v}_1, \ldots, \lambda\vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_n\}\rangle$ si $\lambda \neq 0$.

III) $\langle\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_n\}\rangle = \langle\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i + \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_n\}\rangle$

$\square$

Nota 3.5.6.

I) *Se verifica que*

$$\begin{aligned}\operatorname{rango}(\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}) &= \operatorname{rango}(\{\vec{v}_1-\vec{v}_2,\vec{v}_2,\vec{v}_3\})\\ &= \operatorname{rango}(\{\vec{v}_1-\vec{v}_2,\vec{v}_2-\vec{v}_3,\vec{v}_3\})\\ &= \operatorname{rango}(\{\vec{v}_1-\vec{v}_2,\vec{v}_2-\vec{v}_3,2\vec{v}_3-\vec{v}_1\})\end{aligned}$$

II) *Sin embargo* $\operatorname{rango}(\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}) \neq \operatorname{rango}(\{\vec{v}_1-\vec{v}_2,\vec{v}_2-\vec{v}_3,\vec{v}_3-\vec{v}_1\})$

3.5.1. Cálculo del rango

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Para calcular el rango de A, podemos utilizar dos métodos: orlar por menores o realizar operaciones elementales en las filas o columnas de A. Con este segundo procedimiento, obtenemos una matriz E escalonada por filas (o columnas) y tenemos en cuenta que

$$\operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}(E) = \text{número de filas (o columnas) no nulas de } E,$$

(nótese que las filas no nulas de E forman un sistema de vectores linealmente independienes de K^n).

Veamos a continuación cómo se calcula el rango mediante el proceso de orlar por menores.

Un menor de orden p de A es el determinate de una matriz cuadrada de orden p que resulta de eliminar $m-p$ filas y $n-p$ columnas en A. Por ejemplo, si consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 4 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

entonces

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0\\ 4 & 1\end{vmatrix} \text{ son menores de orden 2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 4 & 2 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2\end{vmatrix} \text{ son menores de orden 3}$$

El rango de A es p si existe en A un menor de orden p no nulo y todos los menores de A de orden mayor que p son nulos.

Se toma un menor Δ_p de orden $p \geq 1$ no nulo. Se forman todos los menores de orden $p+1$ que resultan de orlar Δ_p con una fila $\vec{F}_i$ y todas las restantes columnas de A. Si todos los menores resultantes son nulos, se suprime esa fila y se procede con la siguiente, hasta que:

I) Encontramos un menor de orden $p+1$ no nulo con el que repetiríamos el proceso, ó

II) Todos los menores de orden $p+1$ formados son nulos, con lo que el rango de A sería p.

Proposición 3.5.7. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$. El rango de A es n si, y sólo si, $\det(A) \neq 0$ (es decir A es inversible o regular).*

Si lo que queremos es calcular el rango de un conjunto de vectores $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$, lo que haremos será tomar una base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ de V y hallaríamos las coordenadas de los vectores de S respecto a la base B:

$$\begin{gathered}\vec{v}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + \ldots + a_{1n}\vec{e}_n \\ \vec{v}_2 = a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \ldots + a_{2n}\vec{e}_n \\ \vdots \\ \vec{v}_m = a_{m1}\vec{e}_1 + a_{m2}\vec{e}_2 + \ldots + a_{mn}\vec{e}_n\end{gathered}$$

Así, se forma una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ cuyas filas son las coordenadas de cada vector de S respecto a la base B. Se tiene que $rango(S) = rango(A)$. Si calculamos el rango de A hallando una matriz escalonada E equivalente por filas a A, las filas no nulas de E nos dan las coordenadas respecto a B de los vectores de una base de $< S >$.

Ejemplo 3.5.8. Calcular el rango de $S \subseteq \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, siendo:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Procediendo como hemos comentado, tenemos que

$$\begin{aligned}\text{rango}(S) &= \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 3\end{aligned}$$

Además, se tiene que el siguiente conjunto es una base de S

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \right\}.$$

3.6. Matriz de cambio de base

Sea $V = \mathbb{R}^2$ y sean

$$B = \{\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)\} \text{ y } B' = \{\vec{e'}_1 = (1,1), \vec{e'}_2 = (2,1)\}$$

dos bases de V. Si $[\vec{v}]_B = (v_1\ v_2)^t$ son las coordenadas de un vector $\vec{v}$ respecto a la base B, ¿cuáles son las coordenadas de $\vec{v}$ respecto a la base B'?

Denotemos por $[\vec{v}]'_B = (v'_1\ v'_2)^t$, entonces

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 \\
&= v_1\left((-1)\vec{e'}_1 + \vec{e'}_2\right) + v_2\left(2\vec{e'}_1 + (-1)\vec{e'}_2\right) \\
&= ((-1)v_1 + 2v_2)\,\vec{e'}_1 + (v_1 + (-1)v_2)\,\vec{e'}_2 \\
&= v'_1\vec{e'}_1 + v'_2\vec{e'}_2
\end{aligned}$$

De este modo, se tiene que:

$$[\vec{v}]_{B'} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}[\vec{v}]_B.$$

Sea ahora V un K-espacio vectorial de dimensión n y sean $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ y $B' = \{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \ldots, \vec{e'}_n\}$ dos bases de V. Si sabemos que $[\vec{v}]_B = (v_1\ \ldots\ v_n)^t$ y $[\vec{v}]_{B'} = (v'_1\ \ldots\ v'_n)^t$ son las coordenadas del vector $\vec{v}$ respecto a las bases B y B' respectivamente, ¿qué relación existe entre ambas?

Como $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + \cdots + v_n\vec{e}_n$, expresando cada vector $\vec{e}_j$ de B como combinación lineal de los vectores de la base B'

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= v_1\vec{e}_1 + \cdots + v_n\vec{e}_n \\
&= v_1\left(\sum_{i=1}^n a_{i1}\vec{e'}_i\right) + \cdots + v_n\left(\sum_{i=1}^n a_{in}\vec{e'}_i\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}v_j\right)\vec{e'}_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^n a_{nj}v_j\right)\vec{e'}_n \\
&= v'_1\vec{e'}_1 + \cdots v'_n\vec{e'}_n
\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \begin{array}{cccc} [\vec{e}_1]_{B'} & [\vec{e}_2]_{B'} & & [\vec{e}_n]_{B'} \\ || & || & & || \end{array} & & \begin{array}{c}[\vec{v}]_B \\ || \end{array} \\
[\vec{v}]_{B'} = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix} & = & \left(\boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{matrix}} \ \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{matrix}} \ \begin{matrix} \ldots \\ \ldots \\ \ddots \\ \ldots \end{matrix} \ \boxed{\begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{matrix}} \right) & \cdot & \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}
\end{array}$$

Por tanto, si a la matriz $(a_{ij}) = M_{BB'}$ la llamamos **matriz de cambio de base de** B a B', se tiene que:

$$[\vec{v}]_{B'} = M_{BB'} \cdot [\vec{v}]_B.$$

Obsérvese que la columna j-ésima de $M_{BB'}$ la forman las coordenadas del vector $\vec{e}_j$ respecto a la base B'.

Proposición 3.6.1. *Sean V un K-espacio vectorial y B y B' dos bases de V. La matriz de cambio de base de B a B', $M_{BB'}$, es inversible y su inversa es*

$$(M_{BB'})^{-1} = M_{B'B}$$

Ejemplo 3.6.2. Halla en $(\mathbb{Z}_5)^3$ la matriz de cambio de base $M_{BB'}$ siendo

$$B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,4,1)\} \text{ y } B' = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

Puesto que

$$\begin{array}{rcl} (1,0,0) & = & 1(1,1,0) + 4(0,1,0) + 0(0,0,1) \\ (0,1,0) & = & 0(1,1,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1) \\ (0,4,1) & = & 0(1,1,0) + 4(0,1,0) + 1(0,0,1) \end{array}$$

concluimos que

$$M_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Análogamente,

$$\begin{array}{rcl} (1,1,0) & = & 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,4,1) \\ (0,1,0) & = & 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,4,1) \\ (0,0,1) & = & 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,4,1) \end{array}$$

es decir

$$M_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que $(M_{BB'})^{-1} = M_{B'B}$.

3.7. Teorema de Rouché-Frobenius

Teorema 3.7.1. *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $AX = b$ un sistema de ecuaciones lineales (S.E.L.). Se verifica que:*

I) *El sistema es compatible si, y sólo si,* $\mathrm{rango}(A) = \mathrm{rango}(A|b)$*.*

II) *Si el sistema es compatible y* $\mathrm{rango}(A) = \mathrm{rango}(A|b) = r \leq n$*, se tiene que es compatible determinado (indeterminado) si, y sólo si,* $r = n$ $(r < n)$*.*

Demostración. i) El sistema es compatible si, y sólo si, existen $x_1, \ldots, x_n \in K$ tales que,

$$\vec{b} = x_1\vec{C}_1 + \cdots + x_n\vec{C}_n,$$

siendo $\vec{C}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ las columnas de A, es decir; si, y sólo si, $\vec{b}$ es combinación lineal de $\{\vec{C}_1, \ldots, \vec{C}_n\}$, o sea rango$(A) =$ rango$(A|b)$.

ii) Supongamos que rango(A) = rango$(A|b) < n$, entonces el conjunto $\{\vec{C}_1, \ldots, \vec{C}_n\}$ es ligado, es decir, existen escalares β_j no todos nulos tales que

$$\beta_1\vec{C}_1 + \cdots + \beta_i\vec{C}_i + \cdots + \beta_n\vec{C}_n = \vec{0}$$

Ahora es fácil comprobar que, si $(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ es una solución del sistema, otra solución es $(x_1 + \beta_1, \ldots, x_i + \beta_i, \ldots, x_n + \beta_n)$.

Recíprocamente, si $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(y_1, \ldots, y_n)$ son dos soluciones distintas de $AX = b$ (existe i tal que $x_i \neq y_i$), tenemos que:

$$\vec{b} = x_1\vec{C}_1 + \cdots + x_n\vec{C}_n = y_1\vec{C}_1 + \cdots + y_n\vec{C}_n$$

con lo cual, deducimos que:

$$\vec{0} = (x_1 - y_1)\vec{C}_1 + \cdots + (x_n - y_n)\vec{C}_n$$

y $x_i - y_i \neq 0$, es decir $\{\vec{C}_1, \ldots, \vec{C}_n\}$ es ligado y rango$(A) < n$.

$\square$

II. Aplicaciones Lineales

3.8. Definición y Propiedades

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre K.

Definición 3.8.1. Se dice que una aplicación $f : V \to W$ es una **aplicación lineal** o un **homomorfismo de espacios vectoriales** si verifica:

i) $f(\vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w})$

ii) $f(\alpha\vec{v}) = \alpha f(\vec{v})$

para cualquier par de vectores $\vec{v}, \vec{w} \in V$ y cualquier escalar $\alpha \in K$. Las dos condiciones anteriores se pueden substituir por la condición única:

$$f(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha f(\vec{v}) + \beta f(\vec{w})$$

siendo $\vec{v}, \vec{w} \in V$ y $\alpha, \beta \in K$.

Ejemplo 3.8.2. I) La aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que lleva cada vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ en $f(x, y) = x$ es una aplicación lineal.

II) La aplicación $f : (\mathbb{Z}_3)^2 \to (\mathbb{Z}_3)^3$ que lleva cada vector $(x, y) \in (\mathbb{Z}_3)^2$ en $f(x, y) = (2x + y, y, 3x) \in (\mathbb{Z}_3)^3$ es una aplicación lineal.

III) Sea V un K-espacio vectorial y $\alpha \in K$ un escalar fijo. La aplicación $f : V \to V$ definida por $f(\vec{v}) = \alpha\vec{v}$, para cada $\vec{v} \in V$, es una aplicación lineal.

IV) En general, para cualquier par de números naturales m y n, y cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, la aplicación $f_A : K^n \to K^m$, definida por

$$f_A(x_1, \dots, x_n) = (A(x_1 \ \dots \ x_n)^t)^t$$

es una aplicación lineal. Además, cualquier aplicación lineal entre estos dos espacios vectoriales se puede definir de esta manera.

V) Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$. La aplicación $f : \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{Z}_5) \to \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{Z}_5)$ definida por $f(B) = A \cdot B$, para cada $B \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{Z}_5)$, es una aplicación lineal.

VI) La aplicación $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ definida por

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y & 2x \\ 0 & y \end{pmatrix} \text{ para cada } (x, y, z) \in (\mathbb{Z}_5)^3$$

es una aplicación lineal.

VII) La aplicación $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ definida por $f(x, y, z) = (x+3, y, x+z)$ para cada $(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_5)^3$ no es una aplicación lineal.

Veamos a continuación algunas propiedades de las aplicaciones lineales que se deducen de la definción:

Propiedades 3.8.3. I) *Se verifica que* $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ *y* $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$, *para cada* $\vec{v} \in V$.

En efecto, por ser $f : V \to W$ una aplicación lineal

$$f(\vec{0}_V) = f(\vec{0}_V + \vec{0}_V) = f(\vec{0}_V) + f(\vec{0}_V),$$

y como $f(\vec{0}_V) \in W$ tiene opuesto $-f(\vec{0}_V) \in W$, sumando en ambos miembros de la igualdad anterior se tiene que

$$\begin{aligned}\vec{0}_W &= f(\vec{0}_V) + (-f(\vec{0}_V)) = [f(\vec{0}_V) + f(\vec{0}_V)] + (-f(\vec{0}_V)) \\ &= f(\vec{0}_V) + [f(\vec{0}_V) + (-f(\vec{0}_V))] = f(\vec{0}_V)\end{aligned}$$

Análogamente, para cada $\vec{v} \in V$ se tiene que, por ser f una aplicación lineal,

$$f(-\vec{v}) + f(\vec{v}) = f(\vec{v}) + f(-\vec{v}) = f(\vec{v} + (-\vec{v})) = f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$$

teniendo en cuenta la demostración anterior. Por tanto $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$.

II) *Si $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$ es un subconjunto de vectores de V y $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ son de K,*

$$f(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{v}_p) = \alpha_1 f(\vec{v}_1) + \alpha_2 f(\vec{v}_2) + \cdots + \alpha_p f(\vec{v}_p).$$

III) *Si $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\} \subset V$ es un conjunto ligado entonces $\{f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_p)\}$ es un conjunto ligado de vectores de W.*

Sin embargo, un conjunto linealmente independiente no se transforma, necesariamente, en un conjunto linealmente independiente: si consideramos, por ejemplo, la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $f(x, y) = (x + y, 0)$, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, el conjunto $\{(1, 0), (0, -1)\}$ es un conjunto libre pero $\{f(1, 0) = (1, 0), f(0, -1) = (-1, 0)\}$ es un conjunto ligado.

IV) *Si U, V y W son tres espacios vectoriales sobre K y $f : U \to V$ y $g : V \to W$ son dos aplicaciones lineales, la composición $g \circ f : U \to W$ también es una aplicación lineal.*

Definición 3.8.4. Una aplicación lineal f inyectiva se llama **monomorfismo**. Si f es sobreyectiva, se dice que es un **epimorfismo** y, finalmente, si es biyectiva diremos que f es un **isomorfismo**; en este último caso, la aplicación inversa f^{-1} es un isomorfismo.

3.9. Núcleo e Imagen de una aplicación lineal

Proposición 3.9.1. *Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal entre dos K-espacios vectoriales de dimensión finita. Se verifica que:*

i) *Si* $U \subseteq V$ *es un subespacio vectorial de* V*, se tiene que* $f(U)$ *es un subespacio vectorial de* W*. Además si* $U = \langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p \rangle$*, se tiene que* $f(U) = \langle f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_p) \rangle$*.*

En particular, $f(V)$ *se llama* **subespacio imagen** *y se denota por* $\mathrm{Im}(f)$*. A la dimensión de este subespacio de* W *se le llama* **rango** *de* f*, es decir,* $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rango}(f)$*.*

ii) *Análogamente si* $W' \subseteq W$ *es un subespacio vectorial de* W*, se tiene que* $f^{-1}(W')$ *es un subespacio vectorial de* V*. En particular, el subespacio* $f^{-1}\left(\{\vec{0}_W\}\right)$ *se llama* **núcleo** *de* f *y se denota por* $\mathrm{Ker}(f)$*, es decir*

$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}\left(\{\vec{0}_W\}\right) = \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \vec{0}_W\}.$$

Proposición 3.9.2. *Sea* $f : V \to W$ *una aplicación lineal. Se verifica que* f *es inyectiva si, y sólo si,* $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}_V\}$*.*

Demostración. Supongamos que f es inyectiva y sea $\vec{v} \in V$ un vector del núcleo de f, es decir $f(\vec{v}) = \vec{0}_W$. Como $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ se tiene que $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W = f(\vec{v})$, pero como f es inyectiva $\vec{v} = \vec{0}_V$.

Recíprocamente, sean $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2 \in V$ tales que $f(\vec{v}_1) = f(\vec{v}_2)$; como f es una aplicación lineal

$$\vec{0}_W = f(\vec{v}_1) - f(\vec{v}_2) = f(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

por tanto $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in \mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}_V\}$ es decir, $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ y f es inyectiva. □

Proposición 3.9.3. *Sea* $f : V \to W$ *una aplicación lineal. Son equivalentes:*

i) f *es inyectiva.*

ii) *Si* L *es cualquier conjunto libre de* V*, entonces* $f(L)$ *es libre en* W*.*

iii) *Si* B *es una base de* V*, entonces* $f(B)$ *es una base de* $f(V)$*.*

Demostración. "I) ⇒ II)"

Supongamos que f es inyectiva y sea $L = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ un conjunto libre. Si

$$\alpha_1 f(\vec{v}_1) + \cdots + \alpha_p f(\vec{v}_p) = \vec{0}_W$$

con $\alpha_i \in K$, $\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_p\vec{v}_p \in \mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}_V\}$, así $\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_p\vec{v}_p = \vec{0}_V$ y, como L es libre, todos los escalares $\alpha_i = 0$; por tanto, $f(L) = \{f(\vec{v}_1), \dots, f(\vec{v}_p)\}$ es un conjunto libre.

"II) ⇒ III)"

Si B es una base de V, se tiene que $f(B)$ es un sistema de generadores de $f(V)$ y, al ser B libre por hipótesis, se puede afirmar que $f(B)$ es una base de $f(V)$.

"III) $\Rightarrow$ I)"

Finalmente tomemos $\vec{v} \in V$ un vector de V tal que $f(\vec{v}) = \vec{0}_W$. Si $\vec{v} \neq \vec{0}_V$, se puede encontrar B una base de V tal que $\vec{v} \in B$. Puesto que $f(\vec{v}) \in f(B)$ y $f(B)$ es una base de $f(V)$, llegamos a una contradicción ya que entonces $f(\vec{v}) \neq \vec{0}_W$. □

Proposición 3.9.4. *Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Se verifica que f es sobreyectiva si, y sólo si, f transforma cualquier conjunto de generadores de V en un conjunto de generadores de W.*

Demostración. Sabemos que, si G es un sistema de generadores de V entonces, para cualquier aplicación lineal f, se verifica que $f(V) = \langle f(G) \rangle$. Luego, f es sobreyectiva si, y sólo si, $W = \langle f(G) \rangle$, es decir, $f(G)$ es un conjunto de generadores de W. □

Teorema 3.9.5. (Teorema de la dimensión) *Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal entre dos espacios de dimensión finita. Se verifica que:*

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rango}(f)$$

Demostración. Supongamos que $\dim(V) = n$ y que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = p \leq n$. Si $L = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p\}$ es una base de $\mathrm{Ker}(f)$, puesto que L es libre, el Corolario 3.4.6 nos permite completar L a una base $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p, \vec{e}_{p+1}, \dots, \vec{e}_n\}$ de V. Sabemos que

$$f(V) = \langle \{f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_p), f(\vec{e}_{p+1}), \dots, f(\vec{e}_n)\} \rangle = \langle \{f(\vec{e}_{p+1}), \dots, f(\vec{e}_n)\} \rangle$$

ya que los vectores $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p$ pertenecen al núcleo de f.

Si probamos que $\{f(\vec{e}_{p+1}), \dots, f(\vec{e}_n)\}$ es una base de $f(V)$, se tendrá que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rango}(f) = n - p$, el cardinal de este conjunto.

Puesto que ya sabemos que $\{f(\vec{e}_{p+1}), \dots, f(\vec{e}_n)\}$ es un conjunto de genera´dores de $f(V)$, únicamente queda por probar que es linealmente independiente. Sean pues $\alpha_i \in K$, $i = p+1, \dots, n$, tales que:

$$\alpha_{p+1} f(\vec{e}_{p+1}) + \cdots + \alpha_n f(\vec{e}_n) = \vec{0}_W.$$

Usando que f es lineal tenemos que

$$f(\alpha_{p+1}\vec{e}_{p+1} + \cdots + \alpha_n \vec{e}_n) = \alpha_{p+1} f(\vec{e}_{p+1}) + \cdots + \alpha_n f(\vec{e}_n) = \vec{0}_W,$$

es decir, el vector $\alpha_{p+1}\vec{e}_{p+1} + \cdots + \alpha_n\vec{e}_n$ pertenece al núcleo de f. Como $L = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p\}$ es una base de $\mathrm{Ker}(f)$, existen escalares $\beta_1, \ldots, \beta_p \in K$ de modo que:

$$\alpha_{p+1}\vec{e}_{p+1} + \cdots + \alpha_n\vec{e}_n = \beta_1\vec{e}_1 + \cdots + \beta_p\vec{e}_p$$

o, lo que es lo mismo,

$$\beta_1\vec{e}_1 + \cdots + \beta_p\vec{e}_p - \alpha_{p+1}\vec{e}_{p+1} - \cdots - \alpha_n\vec{e}_n = \vec{0}_V$$

pero como $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p, \vec{e}_{p+1}, \ldots, \vec{e}_n\}$ es un conjunto libre de vectores, concluimos que

$$\alpha_{p+1} = \cdots = \alpha_n = \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$$

□

Como consecuencia del teorema anterior se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.9.6. *Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal entre dos espacios de dimensión finita. Se verifica que:*

I) *f es inyectiva si, y sólo si,* $\dim(V) = \mathrm{rango}(f)$.

II) *f es sobreyectiva si, y sólo si,* $\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(W)$.

III) *f es biyectiva si, y sólo si,* $\dim(V) = \mathrm{rango}(f) = \dim(W)$.

Demostración. Basta tener en cuenta el teorema 3.9.5, que f es inyectiva si, y sólo si, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ y que f es sobreyectiva si, y sólo si, $\mathrm{rango}(f) = \dim(f(V)) = \dim(W)$. □

3.10. Aplicaciones Lineales y Matrices

Cualquier aplicación lineal $f : V \to W$ queda determinada por las imágenes de los vectores de una base de V. Por ejemplo, sea $f : (\mathbb{Z}_5)^2 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ una aplicación lineal que verifica

$$f(1,0) = (3,2,0) \text{ y } f(0,1) = (1,0,1),$$

(recordemos que $C_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ es la base canónica de $(\mathbb{Z}_5)^2$) entonces podemos calcular la imagen de cualquier vector $\vec{v} = (x,y) = x(1,0) + y(0,1)$ de $(\mathbb{Z}_5)^2$ de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x(1,0) + y(0,1)) = xf(1,0) + yf(0,1) \\ &= x(3,2,0) + y(1,0,1) = (3x+y, 2x, y) \end{aligned}$$

En un caso general, consideremos $f : V \to W$ una aplicación lineal y sea $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ una base de V. Denotemos por $\vec{w}_i = f(\vec{e}_i) \in W$, para $i = 1, 2, \dots n$, las imágenes por f de los vectores de la base de V y veamos como queda determinada f por estas imágenes. Para $\vec{v} \in V$ un vector cualquiera de V queremos calcular $f(\vec{v})$:

Supongamos que $[\vec{v}]_B = (x_1 \ \dots \ x_n)^t$ son las coordenadas de $\vec{v}$ respecto a B, se tiene entonces que, por ser f lineal,

$$\begin{aligned} f(\vec{v}) &= f(x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n) \\ &= x_1 f(\vec{e}_1) + \cdots + x_n f(\vec{e}_n) = x_1\vec{w}_1 + \cdots + x_n\vec{w}_n \in W \end{aligned}$$

Si consideramos, ahora, una base B' de W, $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$, y escribimos las coordenadas de cada $\vec{w}_i$ respecto a la base B' de W:

$$\begin{aligned} &\vec{w}_1 = f(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{u}_1 + a_{21}\vec{u}_2 \cdots + a_{m1}\vec{u}_m \\ &\vec{w}_2 = f(\vec{e}_2) = a_{12}\vec{u}_1 + a_{22}\vec{u}_2 \cdots + a_{m2}\vec{u}_m \\ &\dots \\ &\vec{w}_n = f(\vec{e}_n) = a_{1n}\vec{u}_1 + a_{2n}\vec{u}_2 \cdots + a_{mn}\vec{u}_m \end{aligned}$$

podemos sustituir estas igualdades en la expresión de $f(\vec{v})$ obteniéndose que

$$\begin{aligned} f(\vec{v}) = &\ x_1\vec{w}_1 + \cdots + x_n\vec{w}_n \\ = &\ x_1\left(a_{11}\vec{u}_1 + a_{21}\vec{u}_2 \cdots + a_{m1}\vec{u}_m\right) + x_2\left(a_{12}\vec{u}_1 + a_{22}\vec{u}_2 \cdots + a_{m2}\vec{u}_m\right) \\ &+ \cdots + x_n\left(a_{1n}\vec{u}_1 + a_{2n}\vec{u}_2 \cdots + a_{mn}\vec{u}_m\right) \\ = &\ \left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n\right)\vec{u}_1 + \left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n\right)\vec{u}_2 \\ &+ \cdots + \left(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n\right)\vec{u}_m \\ = &\ y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 \cdots + y_m\vec{u}_m \end{aligned}$$

Podemos formar entonces una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ cuya columna i-ésima está formada por las coordenadas de $\vec{w}_i = f(\vec{e}_i)$ respecto a la base B',

$$[f(\vec{e}_i)]_{B'} = \left(a_{1i}\ a_{2i}\ \dots\ a_{mi}\right)^t, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

A esta matriz la denotaremos $M_{BB'}(f)$ y la llamaremos **matriz asociada a** f **respecto a las bases** B **y** B'. Esta matriz verifica que, dado cualquier vector $\vec{v} \in V$, si

$$[\vec{v}]_B = (x_1 \ \dots \ x_n)^t$$

son las coordenadas de dicho vector respecto a la base B de V y

$$[f(\vec{v})]_{B'} = (y_1 \ \dots \ y_m)^t$$

son las coordenadas de su imagen respecto a la base B' de W, entonces:

$$[f(\vec{v})]_{B'} = M_{BB'}(f) \cdot [\vec{v}]_B$$

Ejemplo 3.10.1. I) Si A es una matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$, la aplicación lineal

$$f_A : K^n \to K^m \text{ definida por } f(x_1, \ldots, x_n) = (A \cdot (x_1 \ \ldots \ x_n)^t)^t$$

para cada $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, tiene como matriz asociada respecto a las bases canónicas C_n de K^n y C_m de K^m la matriz A, es decir:

$$M_{C_nC_m}(f_A) = A$$

II) Sea V un espacio vectorial de dimensión n y, B y B' son dos bases de V. Si $id_V : V \to V$ es la aplicación identidad, $id_V(\vec{v}) = \vec{v}$ para cada $\vec{v} \in V$, se tiene que:

$$M_{BB'}(id_V) = M_{BB'}$$

III) La aplicación lineal $f : (\mathbb{Z}_5)^4 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ definida por

$$f(x, y, z, t) = (x + y + 4z, 4x + 4z + t, 4x + y + 2(z + t))$$

para cada $(x, y, z, t) \in (\mathbb{Z}_5)^4$, tiene por matriz asociada respecto a las bases canónicas la siguiente

$$M_{C_4C_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

IV) La aplicación lineal $f : (\mathbb{Z}_3)^3 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ definida por

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y & z \\ z & x \end{pmatrix}, \quad \text{para cada } (x, y, z) \in (\mathbb{Z}_3)^3$$

tiene por matriz asociada respecto a la base

$$B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (2, 1, 1)\} \text{ de } (\mathbb{Z}_3)^3$$

y a la base canónica C de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ la matriz

$$M_{BC}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

v) La aplicación lineal $f : (\mathbb{Z}_3)^3 \to (\mathbb{Z}_3)^2$ definida por

$$f(x, y, z) = (2x + y, 2y + z), \qquad \text{para cada } (x, y, z) \in (\mathbb{Z}_3)^3$$

tiene por matriz asociada respecto a las bases

$$B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (2, 1, 1)\} \text{ de } (\mathbb{Z}_3)^3 \text{ y}$$
$$B' = \{(1, 1), (2, 1)\} \text{ de } (\mathbb{Z}_3)^2$$

la matriz

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Corolario 3.10.2. *Sea $A = M_{BB'}(f)$ la matriz asociada a una aplicación lineal $f : V \to W$ respecto a las bases B de V y B' de W. Si $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ es otra matriz que verifica que, para cualquier $\vec{v} \in V$,*

$$[f(\vec{v})]_{B'} = C \cdot [\vec{v}]_B$$

entonces $A = C$.

Demostración. Denotemos por A_i, respectivamente C_i, la i-ésima columna de la matriz A, respectivamente de la matriz C. Si $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, entonces, para cada $i = 1, \ldots, n$, se tiene que:

$$C_i = C \cdot [\vec{e}_i]_B = [f(\vec{e}_i)]_{B'} = A \cdot [\vec{e}_i]_B = A_i,$$

por tanto, las matrices A y C coinciden. $\square$

El Corolario 3.10.2 permite deducir que si f y g son dos aplicaciones lineales de V en W y $\alpha \in K$ es un escalar, entonces:

$$M_{BB'}(f + g) = M_{BB'}(f) + M_{BB'}(g) \text{ y } M_{BB'}(\alpha f) = \alpha M_{BB'}(f).$$

Proposición 3.10.3. *Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales sobre K con $dim(V) = n$ y $dim(W) = m$. Sean B y B' dos bases de V y W respectivamente, y sea $A = M_{BB'}(f)$ la matriz asociada a f respecto a dichas bases. Se verifica que:*

i) rango(f) = rango(A).

ii) *Si $m = n$ entonces f es un isomorfismo si, y sólo si, A es inversible.*

Demostración. Si $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, sabemos que $f(V) = \langle f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)\rangle$, por lo tanto,

$$\operatorname{rango}(f) = \dim(f(V)) = \operatorname{rango}\{f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)\} = \operatorname{rango}(A)$$

ya que las columnas de A son las coordenadas de cada vector $f(\vec{e}_i)$ respecto a la base B'.

Por otro lado, si $n = m$, sabemos que f es un isomorfismo si, y sólo si, $n = \operatorname{rango}(f) \Leftrightarrow n = \operatorname{rango}(A) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ es inversible. □

Nota 3.10.4. *Si U es un subespacio vectorial de K^n, sabemos que*

$$U = \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n \ ; \ A(x_1 \ \dots \ x_n)^t = (0 \ \dots \ 0)^t\},$$

siendo A una matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Si aplicamos la fórmula de la dimensión a $f_A : K^n \to K^m$, se tiene que:

$$n = \dim(K^n) = \dim(\operatorname{Ker}(f_A)) + \operatorname{rango}(f_A) = \dim(U) + \operatorname{rango}(A)$$

siendo $\operatorname{rango}(A)$ *el número de ecuaciones linealmente independientes que definen al subespacio U.*

Ejemplo 3.10.5. Por ejemplo, si consideramos U el subespacio de $(\mathbb{Z}_3)^3$ definido de la forma

$$U = \{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_3)^3; 2x + y = 0, 2x + z = 0, y + 2z = 0\}$$

es claro que las ecuaciones que definen U no son linealmente independientes, pues la matriz A del sistema que define U

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ es equivalente a la matriz } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego $U = \{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_3)^3; 2x + y = 0, 2y + z = 0\}$ es decir,

$$3 = \dim((\mathbb{Z}_3)^3) = \dim(U) + \operatorname{rango}(A) = \dim(U) + 2$$

Por tanto $\dim(U) = 1$, de hecho es fácil comprobar que $\{(1, 1, 1)\}$ es una base de U.

En el caso de composición de aplicaciones lineales, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.10.6. *Sean V, W y U tres K-espacios vectoriales de dimensiones n, m y p respectivamente y sean B_V, B_W y B_U bases de V, W y U respectivamente. Si $f : V \to W$ y $g : W \to U$ son aplicaciones lineales, la composición $g \circ f$ tiene como matriz asociada:*

$$M_{B_V B_U}(g \circ f) = M_{B_W B_U}(g) \cdot M_{B_V B_W}(f).$$

Demostración. Sabemos que, para $\vec{v} \in V$ y $\vec{w} \in W$, se verifica que:

$$[f(\vec{v})]_{B_W} = M_{B_V B_W}(f) \cdot [\vec{v}]_{B_V} \quad \text{y} \quad [g(\vec{w})]_{B_U} = M_{B_W B_U}(g) \cdot [\vec{w}]_{B_W}$$

Si ahora tenemos en cuenta el Corolario 3.10.2 y que si $\vec{v} \in V$, se tiene que:

$$\begin{aligned} M_{B_W B_U}(g) \cdot M_{B_V B_W}(f) \cdot [\vec{v}]_{B_V} &= M_{B_W B_U}(g) \cdot [f(\vec{v})]_{B_W} \\ &= [g(f(\vec{v}))]_{B_U} = [(g \circ f)(\vec{v})]_{B_U} \end{aligned}$$

se puede concluir que $M_{B_V B_U}(g \circ f) = M_{B_W B_U}(g) \cdot M_{B_V B_W}(f)$. □

Ejemplo 3.10.7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la aplicación lineal definida por $f(x, y) = 2y - x$, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por $g(t) = (3t, t, -t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$. De lo que hemos dicho se desprende que

$$M_{C_2 C_3}(g \circ f) = M_{C C_3}(g) \cdot M_{C_2 C}(f) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

También podríamos haber calculado $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y)) = g(2y - x) = (6y - 3x, 2y - x, x - 2y)$$

y verificar que es la aplicación lineal que se corresponde con la matriz asociada (respecto a las bases canónicas) calculada anteriormente.

Corolario 3.10.8. *Sea $f : V \to W$ un isomorfismo de espacios vectoriales (en particular, $\dim(V) = \dim(W)$) y sean B_V y B_W bases de V y W respectivamente. Sabemos que f^{-1} es un isomorfismo de espacios vectoriales y se verifica que*

$$M_{B_W B_V}(f^{-1}) = (M_{B_V B_W}(f))^{-1}$$

Demostración. Sólo hay que tener en cuenta que $id_V = f^{-1} \circ f$ y que

$$I_n = M_{B_V B_V}(id_V) = M_{B_W B_V}(f^{-1}) \cdot M_{B_V B_W}(f)$$

□

3.11. Cambio de Base y Matrices Asociadas

Veamos ahora la relación entre dos matrices asociadas a la misma aplicación lineal f respecto a distintas bases de los espacios vectoriales.

Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales sobre K, y sean B_V y B'_V bases de V y B_W y B'_W bases de W.

Teniendo en cuenta que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
B_V & B_W \\[-20pt]
V \arrow[r, "f"] & W \arrow[d, "id_W"] \\
V \arrow[u, "id_V"] \arrow[r, dashed, "f"'] & W \\[-20pt]
B'_V & B'_W
\end{tikzcd}
$$

es decir, que $f = id_W \circ f \circ id_V$, podemos afirmar que:

$$
\begin{aligned}
M_{B'_V B'_W}(f) &= M_{B'_V B'_W}(id_W \circ f \circ id_V) \\
&= M_{B_W B'_W}(id_W) \cdot M_{B_V B_W}(f) \cdot M_{B'_V B_V}(id_V) \\
&= M_{B_W B'_W} \cdot M_{B_V B_W}(f) \cdot M_{B'_V B_V}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3.11.1. Sea $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ la aplicación lineal definida por

$$
f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x + z & z \\ y & x + 3y \end{pmatrix}, \text{ para cada } (x, y, z) \in (\mathbb{Z}_5)^3;
$$

consideremos en $(\mathbb{Z}_5)^3$ las bases

$$
C_3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \text{ y } B = \{(1, 0, 1), (0, 2, 1), (1, 1, 0)\}
$$

y en $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ las bases

$$
\begin{aligned}
C_4 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ y} \\
B' &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

Con un sencillo cálculo se obtiene que

$$
M_{C_3 C_4}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}
$$

Para obtener la matriz asociada a f respecto a las bases B y B', $M_{BB'}(f)$, basta calcular el producto de matrices:

$$M_{BB'}(f) = M_{C_4B'} \cdot M_{C_3C_4}(f) \cdot M_{BC_3},$$

teniendo en cuenta que M_{BC_3} está formada por las coordenadas de los vectores de la base B respecto a la base C_3 escritas en columnas, se tiene que

$$M_{BC_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $M_{C_4B'}$ son las coordenadas de los vectores de la base canónica C_4 respecto a la base B', escritas en columna, se tiene que:

$$M_{C_4B'} = (M_{B'C_4})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3.12. Aplicaciones lineales y Teorema de Rouché-Frobenius

Sea $A \cdot X = b$ un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas y denotemos por S su conjunto de soluciones. Se comprueba fácilmente que $S = f_A^{-1}(\{\vec{b}\})$ y el sistema es compatible si, y sólo si, $\vec{b} \in f_A(K^n) = \mathrm{Im}(f_A)$; es decir si

$$rango(A) = rango\,\{\vec{C}_1, \ldots, \vec{C}_n\} = rango\,\{\vec{C}_1, \ldots, \vec{C}_n, \vec{b}\} = rango(A|b)$$

como ya sabíamos.

Cuando el sistema es compatible, siendo $\vec{x_0} \in K^n$ una solución del sistema, se puede comprobar que el conjunto S se puede obtener como

$$S = \{\vec{x_0}\} + \mathrm{Ker}(f_A) = \{\vec{x_0} + \vec{u}; \vec{u} \in \mathrm{Ker}(f_A)\}$$

donde $\mathrm{Ker}(f_A)$ es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo cuya matriz asociada es A.

Así pues, el sistema es compatible determinado si, y sólo si, S es unitario, es decir $S = \{x_0\}$, o lo que es lo mismo $\mathrm{Ker}(f_A) = \{\vec{0}\}$. Esta última condición es claramente equivalente a que $\mathrm{rango}(A) = n$, ya que $n = \dim(\mathrm{Ker}(f_A)) + \mathrm{rango}(A)$.

Ejemplo 3.12.1. Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales en $\mathbb{Z}_5$:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & + & z & = 1 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = 3 \\ x & + & 2y & + & 2z & = 2 \end{array}\right\}$$

El conjunto de soluciones de este sistema es

$$S = \{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_5)^3 \mid f_A(x,y,z) = (1,3,2)\}$$

donde $f_A : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ es la aplicación lineal definida de la forma $f_A(x,y,z) = A \cdot (x\ y\ z)^t$, para cada $(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_5)^3$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$$

Aplicando el método de Gauss, se obtiene que el sistema de ecuaciones dado es equivalente al sistema compatible indetermindo

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & + & z & = 1 \\ & & y & + & 3z & = 3 \end{array}\right\}$$

es decir, $S = \{(1+4z, 3+2z, z), z \in \mathbb{Z}_5\} = (1,3,0) + \langle\{(4,2,1)\}\rangle$. Obsérvese que $f_A(1,3,0) = (1,3,2)$ pues

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

es decir, $(1,3,0)$ es una solución del sistema dado; y $\mathrm{Ker}(f_A) = \langle\{(4,2,1)\}\rangle$.