CÁLCULO

Boletín I. Cálculo diferencial de funciones de una variable

Ejercicios básicos

1. Demuestra que la ecuación $x + \sin x = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$ tiene al menos una raíz en $[0, \pi]$.

2. Justifica la existencia de una solución en el intervalo $[1, 2]$ de la ecuación $e^x + 2^{-x} + 2\cos x = 6$. Determina el número de iteraciones necesarias para aproximar la raíz, mediante el método de dicotomía, con un error inferior a 10^{-5} y calcula las dos primeras iteraciones.

3. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:
$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , \quad \text{si } x \leq -1 \\ (x+1)^3 + 2x & , \quad \text{si } x > -1 \end{cases}$$
Averigua si es derivable en $x = -1$.

4. Sea $f(x) = \arctan\left(\dfrac{\sin x}{1 + \cos x}\right)$. Calcula la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$.

5. Llamamos $f(x) = \sqrt{x+1}$.
   (a) Halla el polinomio de Taylor de cuarto grado de f en $x = 0$.
   (b) Aproxima $\sqrt{1.02}$ con el polinomio de segundo grado y acota el error cometido.

6. (a) Dado $c > 0$, escribe el método de Newton–Raphson para aproximar $\sqrt{c}$. Calcula tres iteraciones para aproximar $\sqrt{2}$ tomando $x_0 = 1$.
   (b) Escribe el método de Newton–Raphson para aproximar $3^{\frac{1}{3}}$ partiendo de $x_0 = 1$.

7. Considera la siguiente tabla de valores:

x_i	-1	0	1	3	4
$f(x_i)$	6	3	6	38	77

   correspondientes a mediciones de una función f.
   (a) Calcula el polinomio p de interpolación de Lagrange de grado 2 relativo a f en los nodos $\{1, 3, 4\}$.
   (b) Calcula el polinomio q de interpolación de Lagrange de grado 2 relativo a f en los nodos $\{-1, 0, 1\}$.
   (c) Aproxima $f(0.25)$ y $f(2)$.

8. Sea la función f dada por $f(x) = \dfrac{1}{2}x|x|$. ¿Cuál es la clase de f?

9. (**SEP03**)
   (a) Construye el polinomio de Taylor, p, de primer orden de la función $g(x) = \sin(x)$ centrado en el punto $x_0 = \pi/2$.

(b) Consideramos ahora la función f definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) \quad , & \text{si } x \leq \pi/2 \\ p(x) \quad , & \text{si } x > \pi/2 \end{cases}$$

siendo p el polinomio construido en el apartado anterior. ¿Cuál es la clase de f en $\mathbb{R}$?

10. (**JUN08**) Calcula los extremos relativos y absolutos, si existen, de la función definida en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ por $f(x) = x^2 - 2\,|x| + 2$.

11. (**DIC08**) Sea la función dada por:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathrm{Dom}\,(f) \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & f(x) = \dfrac{x^2}{e^x} \end{array}$$

(a) Calcula el dominio máximo de f, Dom (f).

(b) Calcula los extremos absolutos de f en el intervalo $[0, 10]$, justificando previamente su existencia.

(c) Calcula los extremos absolutos de f en Dom (f), justificando su existencia.

12. Sea la función f dada por $f(x) = (4x + 1)^{(2+\sin x^2)}$. Calcula su derivada en cualquier punto.

13. (**JUN03**) La relación entre la presión P, el volumen V y la temperatura T de un gas específico viene dada por la ecuación de Van der Waals:

$$\left(P + \frac{5}{V^2}\right)(V - 0.03) = 9.7\,.$$

Considerando el volumen como una función de la presión P, razona si la derivada de V en el punto $(5, 1)$ vale 2.

14. (**FEB05**) Consideramos la función f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x)\,, & \text{si } x \in (-\infty, 0) \\ \arctan(x)\,, & \text{si } x \in [0, 1] \\ \pi x^3/4\,, & \text{si } x \in (1, +\infty)\,. \end{cases}$$

(a) Esboza la representación gráfica de f.

(b) Determina la clase de f en $\mathbb{R}$.

(c) Calcula, si es posible, la recta tangente a f en el punto $x_0 = 0$.

(d) Determina un intervalo en el que f sea de clase infinito.

15. (**FEB01**) Sea f la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & , \quad \text{si } x \in (0, 1) \\ ax^2 + bx + 1 & , \quad \text{si } x \in [1, 2) \end{cases}$$

(a) Determina a y b para que f sea derivable en $(0, 2)$.

(b) ¿Qué condiciones deben verificar a y b para que f tenga un mínimo relativo en el punto $x = 1$?

16. Un rectángulo cuya base está en el eje de abscisas tiene sus dos vértices superiores en la parábola $y = 12 - x^2$. ¿Cuál es la mayor área que puede tener ese rectángulo? Indica sus dimensiones.

17. (**SEP03**) Halla la condición que debe cumplir λ para que el polinomio $x^4 + x^3 + \lambda x^2$ sea cóncavo en algún intervalo. Determina ese intervalo en función de λ.

18. (a) Demuestra que la ecuación $x^4 - 4\,x^3 - 1 = 0$ tiene una única raíz, α, en el intervalo $[4, 5]$.
    (b) Plantea el método de Newton–Raphson para resolver la ecuación del apartado anterior. Partiendo de $x_0 = 4$, obtén la aproximación x_1.

Ejercicios complementarios

1. (**FEB06**) Halla la relación entre a y b para que se verifique:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+a}{2x+b}\right)^{3x} = \pi\,.$$

2. (**SEP07**) Si la recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto $(4, 3)$ pasa por el punto $(0, 2)$, calcula el valor de la función f y su derivada en el punto cuya abscisa es $x = 4$.

3. (**SEP09**) Se desea construir un arco que describa la curva dada por $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Para facilitar la construcción, se propone aproximar dicha función por un polinomio de Taylor de segundo grado centrado en $a = 0$. Calcula dicho polinomio y aproxima $f(1)$.

4. (**FEB99**) Durante la tos, el diámetro de la tráquea disminuye. La velocidad v del aire en la tráquea durante la tos viene relacionada con el radio mediante la ecuación:

$$v = Ar^2(r_0 - r) \quad , \qquad A > 0$$

   donde r_0 es el radio en estado de relajación.

   (a) Halla el radio de la tráquea cuando la velocidad es máxima, así como esta velocidad.
   (b) Justifica la existencia de un mínimo. Calcúlalo.

5. Calcula el límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}\,.$$

6. Aproxima la solución de $x^3 - x - 1 = 0$ en $[1.3, 1.4]$ mediante los métodos de:

   (a) dicotomía, con un error menor que 10^{-5}
   (b) Newton–Raphson, partiendo de $x_0 = 1$ y realizando tres iteraciones.

7. (**DIC01**) Se sabe que la función F, dada por $F(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - \ln x$, tiene un mínimo relativo, $x_{\min}$, en el intervalo $(1, 3)$.

   (a) ¿Es posible aproximar $x_{\min}$ utilizando el algoritmo de iteración funcional con $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$, para $x \in [1, 3]$? Justifica tu respuesta. Si la respuesta anterior es afirmativa, aplica el método para aproximar $x_{\min}$ con un error menor que $\frac{1}{7}$ partiendo de $x_0 = 2$.
   (b) Utiliza el algoritmo de dicotomía, partiendo de $x_0 = 1$ y $x_1 = 3$, para aproximar $x_{\min}$ con un error menor que $\frac{1}{7}$.

8. (**SEP02**)

(a) Demuestra que la ecuación $x^4 - 4\,x^3 - 1 = 0$ tiene una única raíz, α, en el intervalo $[4,5]$.

(b) Plantea el método de Newton–Raphson para resolver la ecuación del apartado anterior, y estudia su convergencia en el intervalo $[4,5]$. Partiendo de $x_0 = 4$, obtén la aproximación x_1. ¿Es convergente la sucesión generada a partir de $x_0 = 6$? En caso afirmativo, indica cuál es el orden de convergencia.

(c) Determina si el algoritmo:

$$\begin{cases} x_0 \in [4,5] \\ x_{k+1} = 4 + \dfrac{1}{x_k^3}\,, \quad k = 0,1,\dots \end{cases}$$

es convergente a la raíz α. Calcula x_2 a partir de $x_0 = 4$ y acota el error cometido en la segunda iteración.

9. (**DIC03**) Consideramos la ecuación $xe^{-x} = e^{-3}$.

(a) Comprueba que tiene exactamente dos soluciones en $\mathbb{R}$.

(b) Describe un método de iteración funcional para aproximar la raíz en el intervalo $[0,1]$. Tomando $x_0 = 0$, calcula x_2 usando este método y acota el error cometido.

(c) Analiza la convergencia global del método de Newton–Raphson en el intervalo $[0,1]$.

(d) Analiza la convergencia de la sucesión generada por el método de Newton–Raphson a partir de un punto en el intervalo $[2,5]$. Calcula x_2 a partir de $x_0 = 2$.

10. Con una hoja cuadrada de cartón, de lado a, se quiere hacer una caja abierta, recortando para ello cuatro cuadrados iguales en las esquinas de la hoja y doblando hacia arriba las pestañas para formar los lados de la caja. ¿Qué dimensiones debe tener la caja para que su volumen sea máximo?

11. (**FEB08**) Obtén el valor aproximado de $\cos\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)$ en función del *seno* y el *coseno* de 1, mediante un polinomio de Taylor de segundo grado para la función $\cos\left(\sqrt{x}\right)$.

12. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x\left(1 + x^2 \sin\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

Averigua si la función derivada es continua en $x = 0$.

13. (**FEB03**) Sea la función real f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} - 1 \quad , & \text{si } x < 0 \\[2ex] x^3 e^{-x^2} \quad , & \text{si } x \geq 0\,. \end{cases}$$

(a) Estudia la derivabilidad de f en $\mathbb{R}$.

(b) Calcula el polinomio de Taylor de segundo grado de la función f en un entorno de $x_0 = 1$.

(c) Determina razonadamente los extremos absolutos de f en $[0,+\infty)$.

14. Obtén el polinomio de McLaurin de grado menor o igual que n relativo a $f(x) = (1-x)^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

15. (a) Calcula el polinomio de interpolación de Lagrange de grado tres relativo a la función $f(x) = 2^{x+1} - 5$ en los puntos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ y $x_3 = 4$.

(b) Calcula, utilizando el apartado anterior, una aproximación del número $r = 4\sqrt{2} - 5$, y una aproximación de la raíz de la ecuación $\log_2(y+5) = 3.5$.

16. (**DIC03**) Sea la función f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x < 0 \\ 2 - \cos x & \text{si } x \geq 0\,. \end{cases}$$

(a) Estudia la continuidad de f en $\mathbb{R}$.

(b) Determina, si existe, $f'(0)$. En caso afirmativo, razona si f es de clase uno en $\mathbb{R}$.

(c) Calcula el polinomio de Taylor de segundo grado de f en $x = -\pi$.

17. (**DIC03**) Halla el radio y la altura de una lata cilíndrica de refresco de 33 cm^3 que minimice la cantidad de material utilizado para su construcción (supón que el grosor del material empleado es uniforme en toda la lata y despreciable).

18. (**JUN04**) Se considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}, & \text{si } x \neq 0 \\ \lambda, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Calcula el valor de λ para el cual f es derivable en $x = 0$.

(b) Calcula $f''(0)$ para el valor de λ hallado en el apartado anterior.

19. (**DIC04**) Un barco B y dos ciudades A y C de la costa forman un triángulo rectángulo en C. Las distancias del barco a las ciudades A y C son 13 km y 5 km, respectivamente. Un hombre situado en A desea llegar hasta el barco B. Sabemos que puede nadar a 3 km/h y caminar a 5 km/h. ¿A qué distancia de A debe abandonar la costa para llegar hasta B lo antes posible?

20. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x^2}{2} & , \quad \text{si } x < 0 \\ \cos x & , \quad \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

¿Cuántas veces es f derivable en el punto $x = 0$?

21. Comprueba que la función F, dada por $F(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - \ln x$, tiene un mínimo relativo, $x_{\min}$, en el intervalo $(1, 3)$. Utiliza el algoritmo de dicotomía, partiendo de $x_0 = 1$ y $x_1 = 3$, para aproximar $x_{\min}$ con un error menor que $\frac{1}{7}$.

22. Consideramos la ecuación $xe^{-x} = e^{-3}$.

(a) Comprueba que tiene exactamente dos soluciones en $\mathbb{R}$.

(b) Plantea el método de Newton–Raphson a partir de un punto en el intervalo $[2, 5]$. Calcula x_2 a partir de $x_0 = 2$.

23. **Razona** la respuesta de las siguientes cuestiones:

(a) Halla un número racional y otro irracional situados entre 3^{500} y $3^{500} + 1$.

(b) Dibuja la gráfica de la función tangente. Dibuja una función inversa respecto a la operación composición e indica su dominio.

(c) Consideramos la circunferencia de centro $(0,0)$ y de radio 2. Halla la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en $x=1$.

(d) Construye el polinomio de Taylor de grado menor o igual que 3 de la función $f(x)=x^2-2x+1$ en un entorno del punto $a=1$.

(e) Calcula la primera derivada de la función $y=\ln(\arcsin(x^2-1))$.

(f) Dadas las funciones f y g, dadas por:

$$f(x)=\begin{cases}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|, & \text{si } x\neq 0\\ 1, & \text{si } x=0\end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x)=\begin{cases}\dfrac{|\sin x|}{x}, & \text{si } x\neq 0\\ 1, & \text{si } x=0\end{cases}$$

¿son continuas en el punto $x=0$?

24. **Razona** la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) (**FEB04**) Los números complejos $2_{\frac{\pi}{5}}$ y $\sqrt{3}+i\sqrt{2}$ son iguales.

(b) (**FEB04**) Sea $f(x)=2^x-3$. El dominio de f^{-1} es $[-3,\infty)$.

(c) (**FEB04**) Sea f una función real de variable real tal que $f(1)=1$, $f'(1)=f''(1)=2$, $f'''(1)=0$. Entonces su polinomio de Taylor de grado 3 centrado en 1 es x^2.

(d) (**FEB04**) La función f dada por:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}\,, & (x,y)\neq(0,0)\\ 1\,, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

es continua en $(0,0)$.

(e) Sea $f(x)=x^3-ax^2+bx+c$, con $a,b,c\in\mathbb{R}$. Entonces:

i. Para que f tenga un extremo relativo es necesario que $4a^2-12b=0$.

ii. Además el punto $x=\dfrac{a}{3}$ es siempre un punto de inflexión de f.

(f) (**JUN03**) Si $P(x)=1-2(x+\pi)^2-3(x+\pi)^3$ es el polinomio de Taylor de orden 3 de una función f en $x_0=-\pi$, entonces $-\pi$ es un máximo relativo de f.