CÁLCULO

Boletín II. Integración de funciones de una variable

Ejercicios básicos

1. Sea f una función continua en $x \in [2,4]$, de la que sabemos que $\min\limits_{x\in[2,4]} f(x) = 3$ y $\max\limits_{x\in[2,4]} f(x) = 6$.
   (a) ¿Puede valer 15 unidades de superficie el área de la figura comprendida entre la gráfica de $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 4$? *Solución:* No
   (b) ¿Entre qué valores puede oscilar el área anterior? *Solución:* $6 \leq A \leq 12$
2. (**SEP07**) Sea $f(x) = \ln x^2$, $x \in [1, e]$. Aplica el teorema del valor medio del cálculo integral, verificando previamente las hipótesis. Calcula el punto en el intervalo $[1, e]$ que satisface el teorema.
   Solución: $e^{1/(e-1)}$
3. (**SEP00**) Sea la función f dada por:
   $$f(x) = \begin{cases} 1 \quad , & \text{si } x \in [0,1] \\ 1+x \quad , & \text{si } x \in (1,2]\,. \end{cases}$$
   Se define $S(x_0)$ como el área limitada por la gráfica de f, el eje OX y la recta $x = x_0$ ($x_0 \in [0,2]$).
   (a) Razona, sin construir la función, la continuidad de S.
   (b) Obtén $S(x_0)$ para cada x_0 perteneciente al intervalo $[0,2]$.
   (c) Supón que se repite el procedimiento con la función S en lugar de f, construyéndose de esta forma la función A, donde $A(x_0)$ es el área limitada por la gráfica de S, el eje OX y la recta $x = x_0$. Razona, sin construir la función, la derivabilidad de A y obtén, además, $A(x_0)$ para todo x_0 perteneciente al intervalo $[0,2]$.
4. (**SEP99**) Halla $f(4)$ si $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = x\cos(\pi x)$. *Solución:* 1
5. Halla el área de la figura limitada por las rectas $y = x$, $y = 2x$ e $y = 4$.
6. (**SEP08**) Halla la longitud de un arco de exponencial $y = e^x$ entre los puntos $(0,1)$ y $(1,e)$.
7. (**SEP09**) Para fabricar una antena se hace girar alrededor del eje OX el arco de la curva $y = \sqrt{2x}$ comprendido entre $x = 0$ y $x = 1$. Calcula la superficie de la antena. *Solución:* $S = 2\pi(\sqrt{3} - 1/3)$
8. (**SEP05**) Una esfera de madera de radio $R = 10$ cm se recubre de una capa de acero de 1 cm de espesor. Calcula, **mediante integración**, el volumen de acero necesario.
9. (**DIC98**) Halla el área limitada por la gráfica de $f(x) = xe^{-2x}$ y el eje OX en el intervalo $(0,\infty)$.
   Solución: 1/4
10. (**DIC98**) Halla los extremos de la función $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt$, con $x > 1$.
    Solución: $F_{\min} = F(2k\pi)$; $F_{\max} = F((2k-1)\pi)$, $k \in \mathbb{N}$

11. (**JUN07**) Halla el valor de la integral impropia $\displaystyle\int_0^1 x^2 \ln x \, dx$. *Solución:* $-1/9$

12. (**JUN08**) Calcula $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$.

    Solución: π

13. Al girar la curva $y = x^2$ alrededor del eje OX, se genera una superficie de revolución; el área lateral de la misma en la región limitada por los planos $x = 0$ y $x = a$ viene dada por:

$$A_L(a) = 2\pi \int_0^a x^2 \sqrt{1 + 4x^2} \, dx \, .$$

    Obtén mediante el método de Simpson una aproximación del área para $a = \sqrt{2}$. Obtén otra aproximación mediante el método de trapecio compuesto, dividiendo el intervalo en dos subintervalos de igual longitud.

14. En un circuito eléctrico, la diferencia de potencial V está dada por $V(t) = Li'(t) + Ri(t)$, donde $i(t)$ es la intensidad de corriente en el instante t. Tomando $L = 1$ y $R = 2$, se ha medido la corriente para distintos valores de t, obteniendo la tabla siguiente:

t_k	2	4	6
$i(t_k)$	3	5	9

    Aproxima la carga eléctrica, $q = \displaystyle\int_2^6 i(t) \, dt$, mediante los métodos del rectángulo, trapecio, Simpson y trapecio compuesto.

Ejercicios complementarios

1. (**SEP06**) Sea la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x & , \text{ si } x \in [0, \pi] \\[2ex] \dfrac{x}{\pi - x^2} & , \text{ si } x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

   (a) ¿Es f integrable en $[0, 2\pi]$? Razona la respuesta.

   (b) Calcula el área limitada por el grafo de f, $x = 0$, $x = 2\pi$ e $y = 0$.

2. (**SEP98**) Sea $f(x) = x(x - a)$, $a > 0$, y V_f el volumen engendrado al girar en torno al eje OX la región del plano limitada por dicha función y las rectas $y = 0$ y $x = c$, $c \geq a > 0$. Halla c para que V_f sea igual al del cono engendrado por el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(c, 0)$ y $(c, f(c))$ al girar en torno al eje OX. *Solución:* $c = 1.25a$

3. (**SEP01**) Calcula, en caso de ser finito, el volumen que genera la curva $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ al girar alrededor del eje OX para $0 \leq x \leq 2$.

4. (**JUN01**) Sea la función $f(x) = \sqrt{-x \ln x}$ definida en los puntos x para los cuales $-x \ln x \geq 0$. Calcula el volumen del sólido generado al rotar todo su dominio alrededor del eje OX. *Solución:* $\pi/4$

5. (**DIC08**) Calcula el volumen del cuerpo de revolución que se obtiene al girar, en torno al eje OX, la intersección de los círculos $x^2 + y^2 \leq 16$ y $(x-3)^2 + y^2 \leq 25$. *Solución:* 60π

6. (**JUN07**) Halla el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por los semiejes positivos, la parábola $y = -x^2 + 2x + 3$ y las rectas $y = 2 - 2x/3$ y $x = 3$.

   Solución: $V = 133\pi/5$

7. (**JUN06**) Sea la función F dada por:

$$F(x) = \int_{\pi/2}^{g(x)} f(t)\, dt$$

   donde $f(t) = (1 - \sin^3 t)\, e^t$ y $g(x) = \frac{\pi}{2} + e^x$.

   (a) Determina los puntos críticos de F en el intervalo $[1\,,\,\ln(5\pi)]$. *Solución:* $\ln(2\pi)$; $x_2 = \ln(4\pi)$

   (b) Sin calcular F'', clasifica los puntos críticos y determina los extremos absolutos de F en $[1, \ln(5\pi)]$.

   Solución: $F_{\min} = F(1)$; $F_{\max} = F(\ln 5\pi)$

8. (**FEB09**) La transformada de Laplace de una función continua f es otra función dada por:

$$\widehat{f}(x) := \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-xt}\, dt\,.$$

   Demuestra que la transformada de $f(t) = t$ es $\widehat{f}(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

9. En una pista de pruebas, un automóvil de 2000 kg de masa viaja a una velocidad de 30 m/s. En ese instante, se desactiva la transmisión, la velocidad empieza a disminuir y la distancia recorrida hasta alcanzar la velocidad a está dada por la integral:

$$x(a) = \int_a^{30} \frac{2000u}{10u^2 + 1200}\, du\,.$$

   Aproxima, mediante las fórmulas de trapecio compuesto y punto medio compuesto, la distancia recorrida hasta que el coche se detiene, utilizando $h = 5$ m/s como paso de integración.

10. Sea $Q(t) = \cos(\pi t)$ la carga eléctrica de un circuito en un instante de tiempo t.

    (a) Aproxima el valor de la carga en $t = 0.25$ mediante el polinomio de Lagrange, P_1, relativo a Q y a los instantes de tiempo $\{0\,,\,0.5\}$.

    (b) Calcula el polinomio de Lagrange, P_2, relativo a Q y a los instantes $\{0.5\,,\,1\}$

    (c) Aproxima la integral definida:

$$\int_0^1 Q(t)\, dt$$

    empleando los polinomios anteriores. Aproxímala también mediante la fórmula del trapecio compuesto.

11. **Razona** la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

    (a) El área bajo el grafo de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ en $[-1, 1]$ es finita.

(b) (**FEB01**) La función

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } x < 1 \\ 2x - 3, & \text{si } x \in [1, 2] \\ \sin x, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

es integrable en todo intervalo cerrado de $\mathbb{R}$.

(c) Construimos $g(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,dt$. Entonces $g'(x) = 2x\,f(x^2)$.

(d) Consideramos $f(x) = 1 - x^2$ y las particiones $P = \{-5, 1, 2\}$ y $Q = \{-5, 0, 1, 2\}$. Entonces, $L(P, f) \leq U(Q, f)$.

(e) Si f es integrable en $I = [7, 9]$ y $3 \leq f(x) \leq 9$, $\forall x \in I$, entonces $6 \leq \displaystyle\int_7^9 f(x)\,dx \leq 18$.

(f) (**DIC03**) Si $F(x) = \displaystyle\int_{2x}^{x^2} \sqrt{t^2 + 1}\,dt$, entonces $F'(x) = 2x\sqrt{x^4 + 1}$.

(g) (**FEB04**) El área bajo el grafo de la función $f(x) = \dfrac{e^{-\ln x}}{x}$ en el intervalo $[1, \infty)$ es infinita.