Práctica 3: Cálculo Integral con MatLab
Curso 2010-2011

1 Introducción

Una de los paquetes más útiles para el cálculo con MatLab lo constituye Symbolic Math Toolbox, que permite realizar cálculo simbólico avanzado, es decir, se puede prescindir de asignar un número a una variable y tratarla como una constante genérica.

Esta herramienta disponible en MatLab nos permitir realizar operaciones de integración simbólica como calcular integrales definidas, impropias o calcular áreas, por ejemplo.

2 Cálculo de primitivas

El cálculo de primitivas con MatLab es muy sencillo. La integración simbólica se lleva a cabo utilizando el comando *int*, empleando las sintaxis

$$int(S) \quad o \quad int(S, var)$$

donde:

- S puede ser una expresión simbólica o el nombre de una expresión simbólica.
- En el comando *int(S)*, si la expresión contiene una única variable simbólica, el cálculo se llevará a cabo con respecto a esa variable. Si la expresión contiene más de una variable, la integración se realizará respecto a la variable simbólica por defecto (x).
- En el comando *int(S, var)*, la integración se realizará con respecto a la variable *var*. Esta sintaxis se utiliza para integrar expresiones con más de una variable simbólica.

Del mismo modo que la derivación, la integración se puede extender a vectores y matrices.

Ejemplo.- Calcula $\int(2cos(x) - 6x)dx$.

Solución:

$>> syms\, x;$
$>> S = 2 * cos(x) - 6 * x;$
$>> int(S)$
$ans =$
$2 * sin(x) - 3 * x \wedge 2$

MatLab no incluye la constante de integración que se debe tener en cuenta en el cálculo de primitivas.

Nota 2.1 *Si x no está definida como una variable simbólica, utilizaremos la siguiente sintaxis:*

$$int('S', 'x')$$

En el caso del ejemplo anterior, tendríamos lo siguiente:

$>> int('2*cos(x)-6*x')$
$ans =$
$2*sin(x)-3*x\wedge 2$

O bien:

$>> int('2*cos(x)-6*x','x')$
$ans =$
$2*sin(x)-3*x\wedge 2$

Sin embargo, esta versión de Matlab nos da un aviso como el que sigue:
Warning. The method char/int will be removed in a future relase. Use sym/int instead.

Ejemplo.- Calcula $\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$.

Solución:

$>> syms\, x;$
$>> int((x+1)/((x\wedge 2+1)*(x\wedge 2+4)),x)$
$ans =$
$log(x-i)*(1/6-i/6)+log(x+i)*(i/6+1/6)+log(x-2*i)*(i/12-1/6)+log(x+2*i)*(i/12-1/6)$

Ejercicios:

1. Calcula $I=\int e^{4x}dx$.

2. Calcula $\int x^5 logx dx$.

3. Calcula $\int cos(sen(x))dx$.

Matlab permite introducir parámetros en las integrales y, en consecuencia, podremos trabajar con ellos como si fueran constantes. Veamos un ejemplo.

Ejemplo .- Calcula $\int sen(ax)cos(bx)dx$.

Solución:

$>> syms\, a\, b\, x;$
$>> int(sin(a*x)*cos(b*x),x)$
$ans =$
$-(b*sin(a*x)*sin(b*x)+a*cos(a*x)*cos(b*x))/(a\wedge 2-b\wedge 2)$

Nota 2.2 *En los dos ejemplos anteriores, podríamos prescindir del segundo argumento en el comando int y en ese caso, la integraciń se realizaría con respecto a la variable simbólica por defecto* x.

3 Integrales definidas

Las integrales definidas también son conocidas como integrales propias. Se dice que una integral es propia si el integrando está definido y es finito en un intervalo cerrado y acotado, cuyos extremos son los límites de integración.

Para calcular integrales definidas se utilizan estas variantes del comando *int* que vimos en la primera sección:

$$int(S, a, b) \quad o \quad int(S, var, a, b)$$

donde:

- S puede ser una expresión simbólica o el nombre de una expresión simbólica.
- a y b son los límites de integración. Pueden ser escalares o variables simbólicas.
- El comando *int(S, a, b)* realizará la integral, si S solo depende de una variable simbólica, con respecto a dicha variable simbólica o, en caso de depender de más de una, lo hará con respecto a la variable simbólica por defecto (x).
- El comando *int(S, var, a, b)* realizará la integral con respecto a la variable simbólica *var*.

Ejemplo.- Calcula la integral definida $\int_0^{\pi}(sen(y) - 5y^2)dy$.

Solución:

$>> syms\, y;$
$>> int(sin(y) - 5 * y \wedge 2, 0, pi)$
$ans =$
$2 - (5 * pi \wedge 3)/3$

Si la variable x no está definida como simbólica, utilizaríamos la siguiente sintaxis:

$$int('f', 'x', a, b)$$

La integración es a menudo un proceso difícil y puede suceder que ni siquiera exista una respuesta completamente cerrada para un problema dado. En ese caso, puede ocurrir que Matlab no encuentre una solución y devolverá *int(S)* junto con un mensaje del tipo *"Explicit integral could not be found"*.

Por otro lado, si se desea obtener el resultado en forma decimal y con un número preciso de decimales, tras la instrucción *int* se usaría *vpa(I,n)*, que evaluará la expresión simbólica I con n cifras decimales prefijadas.

Ejemplo.- Calcula el valor de la integral $\int_0^1 x^2dx$ y expresa el resultado con tres cifras decimales.

Solución:

$>> syms\, x;$
$>> int(x \wedge 2, 0, 1)$
$ans =$
$1/3$
$>> vpa(ans, 3)$
$ans =$
$.333$

Nota 3.1 *Si tenemos el formato por defecto (*format short*) el número máximo de decimales es 4.*

Ejercicios.-

1. Sean las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = (x+1)^2$. Calcula $\int_0^2 (f+g)dx$. Compara el resultado obtenido con $\int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 g(x)dx$.

2. Calcula $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} kf(x)dx$ con $f(x) = sen(x)$ y $k = 5$. Compara el resultado con el cálculo de $k\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx$.

3. Calcula $\int_1^1 f(x)dx$ donde $f(x) = x^2$.

4. Sea $f(x) = cos(x)$. Calcula $I = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$. Explica qué sucede si calculamos $\int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_0^{\pi} f(x)dx$.

4 Integrales impropias

El cálculo de integrales impropias combina el concepto de integral definida y el de límite. Existen tres tipos de integrales impropias:

- Primera especie. Son aquellas en las que la función a integrar es acotada pero el intervalo de integración no lo es.
- Segunda especie. Son aquellas en las que la función a integrar no es acotada, mientras que el intervalo de integración sí que está acotado.
- Tercera especie. Son una combinación de los dos tipos anteriores.

A lo largo de esta sección, veremos los pasos a seguir para calcular integrales impropias empleando MatLab.

Ejemplo.- Calcula la integral de primera especie $\int_0^{\infty} \frac{sen(x)}{x}dx$.

Solución:

$>> syms\, x;$
$>> f = sin(x)/x;$
$>> int(f, 0, inf)$
$ans =$
$pi/2$

Ejemplo.- Calcula la integral de segunda especie $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$.

Solución:

$>> syms\, x;$
$>> int(1/x, 0, 1)$
$ans =$
Inf

Ejemplo.- Calcula la integral de tercera especie $\int_4^{\infty} \frac{1}{x^2-5x+4} dx$.

Solución:

$>> syms\, x;$
$>> J = int(1/(x \wedge 2 - 5 * x + 4), 4, Inf)$
$J = Inf$

5 Aplicaciones geométricas

5.1 Cálculo de áreas

El cálculo de la integral de una función no negativa en un intervalo $[a, b]$ se interpreta geométricamente como el área delimitada por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = a$, $x = b$.

Ejemplo.- Calcula el área bajo la curva $y = 5x^2 - 2x + 1$ en el intervalo $[0, 1]$.

Solución:

$>> syms\, x;$
$>> int(5 * x \wedge 2 - 2 * x + 1, 0, 1)$
$ans =$
$5/3$

Nota 5.1 *La parábola del ejercicio anterior tiene su gráfica en el semiplano positivo, pues sus raíces son complejas, como se puede comprobar utilizando el comando solve:*

$>> solve(5 * x \wedge 2 - 2 * x + 1)$
$ans =$
$1/5 - (2 * i)/5$
$(2 * i)/5 + 1/5$

5.2 Cálculo de volúmenes

5.2.1 Volumen de un sólido de secciones conocidas

Si cortamos un cuerpo por un plano perpendicular al eje de abscisas, obtenemos una sección de área $A(x)$ en cada punto de abscisa x. Entonces, el volumen de ese cuerpo comprendido entre los planos perpendiculares al eje OX en los puntos de abscisas a y b, viene dado por:

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

De modo análogo, se puede definir el volumen de un sólido comprendido entre los planos perpendiculares al eje OY.

Ejemplo.- Halla el volumen limitado por un elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Solución:

Si cortamos el elipsoide por el plano $x = k$, la sección es la elipse $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}$, es decir,

$$\frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - k^2)} + \frac{z^2}{\frac{c^2}{a^2}(a^2 - k^2)} = 1$$

suyos semiejes son $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - k^2}$ y $\frac{c}{a}\sqrt{a^2 - k^2}$. El área $A(k)$ de la elipse viene dada por

$$A(k) = \pi \frac{bc}{a^2}(a^2 - k^2)$$

Entonces, el volumen pedido es

$$V = \int_{-a}^{a} A(x)dx$$

Si calculamos la integral con Matlab obtenemos:

$>> syms\, a\, b\, c\, x;$
$>> A = pi * (b * c/a^2) * (a^2 - x^2);$
$>> V = int(A, x, -a, a)$
$V =$
$(4 * pi * b * c * a)/3$

5.2.2 Volumen de un cuerpo de revolución

Si se hace girar la curva $y = f(x)$ alrededor del eje de abscisas, se genera un sólido de revolución cuyos cortes al eje OX tienen área $A(x) = \pi(f(x))^2$. Por tanto:

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx$$

Ejemplo.- Calcula el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por la función $f(x) = \sqrt{x}$, la recta $x = 3$ y el eje de abscisas.
Solución:

Por lo tanto, si calculamos la integral con Matlab obtenemos:

$>> V = pi * int('sqrt(x) \wedge 2', 'x', 0, 3)$
$V =$
$(9 * pi)/2$

5.3 Longitudes de arcos de curvas

Sea la curva $y = f(x)$ con f función derivable y con derivada continua en $[a, b]$. La longitud del arco de dicha curva entre los puntos de abscisas a y b, viene dada por:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

Ejemplo.- Calcula la longitud del arco de la curva $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ desde el punto (0, 1) al punto (1,0).

Solución:

Sea $f(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, entonces $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$. Nótese que no existe la derivada de la función en el punto 1, asq́ue tendríamos una integral impropia.

Por lo tanto,

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}} dx$$

Si utilizamos Matlab para calcular esta integral, obtenemos:

$>> syms\, x;$
$>> L = int('sqrt(1/(1 - x \wedge 2))', ' x', 0, 1)$
$L =$
$pi/2$

Nota 5.2 *Se podrían hacer todos los cálculos usando Matlab. En ese caso, tendríamos:*

$>> syms\, x;$
$>> f = sqrt(1 - x \wedge 2);$
$>> df = diff(f)$
$df =$
$-x/(1 - x \wedge 2) \wedge (1/2)$
$>> A = sqrt(1 + df \wedge 2)$
$A =$
$(1 - x \wedge 2/(x \wedge 2 - 1)) \wedge (1/2)$
$>> L = int(A, x, 0, 1)$
$L =$
$pi/2$

6 Integración numérica

La integración numérica es utilizada para calcular el valor numérico de una integral definida cuando no se puede calcular de forma analítica.

6.1 Regla del trapecio

Sea una función f y queremos calcular $\int_a^b f(x)dx$.

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

MatLab tiene implementada la regla del trapecio y el comando propio es *trapz*, cuya sintaxis es la siguiente

$$trapz(x, y)$$

Donde x e y son vectores de la misma dimensión. De esta forma, calculamos la integral de y con respecto a x.

Ejemplo.- Calcula mediante la Regla del trapecio la integral $I_1 = \int_0^2 e^{(cos(x^2))}dx$.

Solución:

Implementamos el código en un fichero (**trapecio.m**).

$a = 0;$
$b = 2;$
$syms\, x;$
$f = exp(cos(x \wedge 2));$
$fa = subs(f, a);$
$fb = subs(f, b);$
$intf = ((b-a)/2) * (fa + fb)$

Ejecutamos:

$>> trapecio$
$intf =$
3.2384

Si repetimos el cálculo utilizando *trapz*, obtenemos:

$>> x = [0 : 0.1 : 2];$
$>> y = exp(cos(x. \wedge 2));$
$>> I1 = trapz(x, y)$
$I1 =$
3.2246

Si calculamos la integral de forma exacta empleando el cálculo simbólico obtenemos:

$>> syms\, x;$
$>> f = exp(cos(x \wedge 2));$
$>> int(f, 0, 2)$
$Warning: \, Explicit\, integral\, could\, not\, be\, found.$
$ans =$
$int(exp(cos(x \wedge 2)), x = 0..2)$

Ejercicio.- Calcula mediante la Regla del trapecio la integral $I_2 = \int_1^3 (e^{-x^2})dx$.

6.2 Regla de Simpson

Sea una función f y queremos calcular $\int_a^b f(x)dx$.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)$$

.

Ejemplo.- Calcula la integral $\int_0^2 e^{(cos(x^2))}dx$.

Solución:

Implementamos el código en un fichero (**simpson.m**).

$a = 0;$
$b = 2;$
$c = (a + b)/2;$
$syms\, x;$
$f = exp(cos(x \wedge 2));$
$fa = subs(f, a);$
$fb = subs(f, b);$
$fc = subs(f, c);$
$intf = ((b - a)/6) * (fa + 4 * fc + fb)$

Ejecutamos:

$>> simpson$
$intf =$
3.3682

Ejercicio.- Calcula la integral $\int_1^3 e^{(-x^2)}dx$.

7 Ejercicios

A continuación se proponen algunos ejercicios en los que se utilizarán los conceptos desarrollados en los apartados anteriores.

1. Calcula $\int_3^\infty \frac{1}{x^2-4}dx$.

2. Calcula $\int_{-b^2}^0 \sqrt{\frac{-1}{x}}dx$.

3. Calcula $\int_{16}^\infty \frac{1}{(\sqrt{x}-4)}$. Repetir el cálculo utilizando la definición de integral impropia y compara los resultados obtenidos.

4. Calcula la integral $\int_1^{\frac{5}{2}} \sqrt[3]{x^2+8}$ mediante la regla del trapecio.
5. Calcula la integral $\int_1^3 e^x sen(x)dx$ mediante la regla de Simpson.
6. Calcula el área delimitada por la curva $y = x^2+3$, el eje OX y las rectas x=0, x=4. Representa gráficamente la función, los ejes cartesianos y las rectas que delimitan el área pedida.

7. Calcula la longitud del arco de la curva $y = x^2$ desde el origen hasta el punto (2,4).
8. Calcula el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por la función $f(y) = \sqrt{y-1}$, la recta $y = 3$ y el eje de ordenadas.