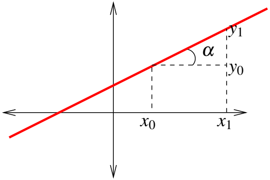
Cálculo

Octubre 2010

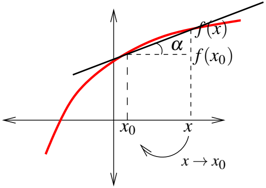
Derivada. Introducción

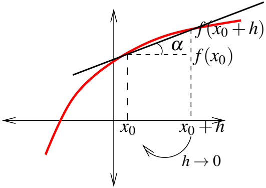
Recordemos la definición de pendiente de una recta:



$$\text{Pendiente} = m = \tan\alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Y ahora consideremos las pendientes de las rectas secantes a una función, lo que, en el límite, será la definición de derivada:





$$\tan\alpha = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad \tan\alpha = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Definición de derivada

Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$

Definición

Se dice que f es **derivable** *en el punto $x_0 \in (a,b)$ si existe el siguiente límite:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

en cuyo caso dicho límite se representa por $f'(x_0)$.

Definición de derivada. Observaciones

1. Vemos la utilidad de no incluir el punto x_0 (en este caso, el punto $h=0$) en la definición de límite. En la expresión $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ no podemos hacer nada si $h=0$, ya que tendríamos una división entre 0.
2. El cociente $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ mide la variación de la función respecto a la variación de la variable. Por ese motivo a $f'(x_0)$ se le denomina, en ocasiones, coeficiente de variación de f, o razón de cambio de la función f, en el punto x_0.
3. Ahora ya podemos calcular la ecuación de la recta tangente utilizando la fórmula punto-pendiente,

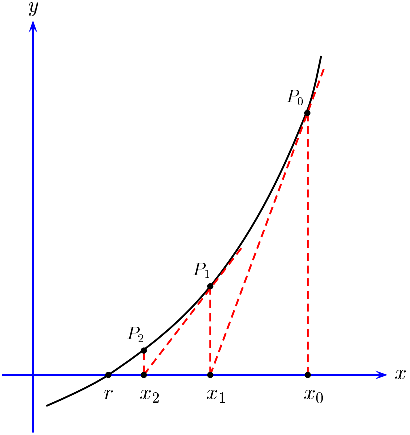
$$y-y_0 = m\,(x-x_0) \Longrightarrow y = y_0 + m\,(x-x_0)\,.$$

En este caso, $(x_0,y_0)=(x_0,f(x_0))$, $m=f'(x_0)$. Y la recta tangente,

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0)\,.$$

Aproximación de raíces. Método de Newton–Raphson

Partiendo de una aproximación x_0 de una raíz de f, construimos x_1 intersecando el eje de abscisas con la recta tangente a la gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$:



Aproximación de raíces. Método de Newton–Raphson

- La ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ es

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- El punto de corte de esta recta con el eje de abscisas $y = 0$ es

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

- Para $k = 1, 2, \ldots$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Nota

El proceso se repite hasta que x_k aproxima satisfactoriamente una raíz α.

Derivadas laterales

Definición

Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$. *Definimos*

- **derivada por la izquierda** *de* f *en* x_0 *como*

$$f'(x_0^-) := \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

- **derivada por la derecha** *de* f *en* x_0 *como*

$$f'(x_0^+) := \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Propiedad

Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$. f *es derivable en* x_0 *si y sólo si es derivable por la izquierda y por la derecha en* x_0 *y ambas derivadas coinciden.*

Derivable $\Rightarrow$ continua

Propiedad

Si f es derivable en x_0, entonces f es continua en x_0. El recíproco no siempre es cierto.

Consecuencia: Si f no es continua en x_0 entonces f no puede ser derivable en x_0.

Recuerda:

- Derivable en $x_0 \Rightarrow$ continua en x_0
- No continua en $x_0 \Rightarrow$ no derivable en x_0

Derivadas elementales

- $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$,
- $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$, $\qquad \frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x}\log_a e$,
- $\frac{d}{dx}e^x = e^x$, $\qquad \frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$,
- $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$, $\qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$,
- $\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$,
- $\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\qquad \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$,
- $\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$.

Propiedades de la derivada

Propiedades aritméticas

Sean $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$, dos funciones derivables en un punto $x_0 \in (a,b)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces

- $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$,
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$,
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$, si $g(x_0) \neq 0$.

Regla de la cadena

Sean f y g dos funciones tales que f es derivable en x_0 y g es derivable en $f(x_0)$. Entonces $(g \circ f)$ es derivable en x_0 y

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

Derivación implícita

Una ecuación $F(x,y)=0$ **define implícitamente una función** f en un intervalo (a,b) si:

$$F(x,f(x))=0 \qquad \forall x\in(a,b)$$

- Por ejemplo, la ecuación:

  $$x^2+y^2=4$$

  define la función

  $$f(x)=\sqrt{4-x^2} \qquad \forall x\in(-2,+2)$$

Propiedad

Si f es derivable, entonces F también lo es.

- Como consecuencia, podemos calcular f' a partir de F'
- Para calcular $F'=\frac{dF}{dx}$, derivaremos los términos en los que aparezcan expresiones de x de forma usual, mientras que para los términos con y tendremos en cuenta la regla de la cadena.

Derivación implícita

- Dada la ecuación $x^2 + 2y^2 - 3xy = 0$, deseamos calcular y'.

  Derivamos aplicando la regla de la cadena:

$$2x + 4yy' - 3y - 3xy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{3y - 2x}{4y - 3x}.$$

- Dada la ecuación $\frac{x-1}{4} + 4y^2 = 1$, deseamos calcular y'.
- Derivamos aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{1}{4} + 8yy' = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = -\frac{1}{32y}.$$

Derivación logarítmica

Es un caso particular del tema anterior.

- Supongamos que queremos calcular la derivada de la función $f(x) = x^x$
  Sea $y = x^x$. Tomando logaritmos:

$$\ln y = x \ln x$$

y derivando:

$$\frac{y'}{y} = \ln x + \frac{x}{x} = 1 + \ln x$$

de donde: $y' = y\,(1 + \ln x) = x^x\,(1 + \ln x)$

Regla de L'Hôpital

Sean $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en $(x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$, con $x_0 \in (a,b)$ y $r > 0$. Si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \quad \text{y} \quad \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

entonces,

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Regla de L'Hôpital

- El recíproco no es cierto:

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \not\Longrightarrow \quad \exists \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- El enunciado del teorema también es válido si:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$$

  o cuando calculamos los límites en $\pm\infty$

- Si en la expresión $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ se vuelve a producir una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ ó $\dfrac{\infty}{\infty}$ se puede volver a aplicar L'Hôpital (si se verifican las hipótesis)

- Las indeterminaciones $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0 y 1^∞ se pueden reducir a indeterminaciones de tipo L'Hôpital

Derivadas sucesivas

Definición

Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en todos los puntos de (a,b). Definimos la función derivada como:

$$\begin{array}{rccc} f' : & (a,b) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightsquigarrow & f'(x) \end{array}$$

- Dado $x_0 \in (a,b)$ se define:

$$f''(x_0) = (f')'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h}$$

  si este límite existe y es finito. En este caso, se dice que f es derivable dos veces en x_0

- En general, una vez que se tiene $f^{(n)} : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, se define:

$$f^{(n+1)}(x_0) = \left(f^{(n)}\right)'(x_0)$$

Definición

Diremos que f es de **clase** *n en (a,b), y se representa por:*

$$f \in \mathscr{C}^n(a,b)$$

si existe la derivada n–ésima de f en (a,b) y es continua.

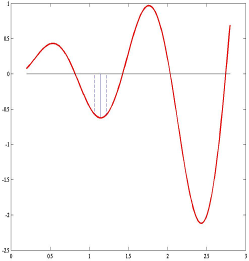
- Diremos que $f \in \mathscr{C}^\infty(a,b)$ si $f \in \mathscr{C}^n(a,b)$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- Diremos que $f \in \mathscr{C}^n[a,b]$, si existe $(c,d) \supset [a,b]$ tal que $f \in \mathscr{C}^n(c,d)$

Extremos relativos

Definición

Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que la función f tiene un **mínimo local** *o relativo en $x_0 \in (a,b)$ si existe $r > 0$ tal que:*

$$f(x_0) \leq f(x), \qquad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

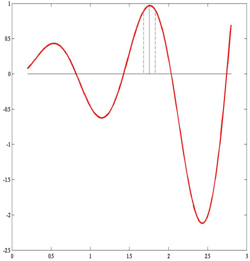


Extremos relativos

Definición

Sea $f:(a,b)\longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que la función f tiene un **máximo local** *o relativo en $x_0\in(a,b)$ si existe $r>0$ tal que:*

$$f(x_0)\geq f(x)\,,\qquad \forall x\in(x_0-r,x_0+r)$$



Propiedad

Sea $f:(a,b)\longrightarrow \mathbb{R}$ *derivable en* $x_0\in(a,b)$. *Si* f *tiene en* x_0 *un extremo relativo, entonces* $f'(x_0)=0$.

Criterio de la primera derivada

Sea $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, $x_0\in(a,b)$ y existe $r>0$ tal que f es derivable en $(x_0-r,x_0)\cup(x_0,x_0+r)$.

- Si $f'(x)<0$, $\forall x\in(x_0-r,x_0)$, y $f'(x)>0$, $\forall x\in(x_0,x_0+r)$, entonces f presenta en x_0 un mínimo relativo
- Si $f'(x)>0$, $\forall x\in(x_0-r,x_0)$, y $f'(x)<0$, $\forall x\in(x_0,x_0+r)$, entonces f presenta en x_0 un máximo relativo

Criterio de la segunda derivada

Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ con derivada segunda continua en (a,b). Sea $x_0 \in (a,b)$ tal que $f'(x_0) = 0$. Entonces:

- si $f''(x_0) < 0$, f presenta en x_0 un máximo relativo,
- si $f''(x_0) > 0$, f presenta en x_0 un mínimo relativo.

Propiedad

Sean $f \in \mathscr{C}^n(a,b)$ *y* $x_0 \in (a,b)$ *tales que* $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ *y* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. *Entonces*

- *Si* n *es par y* $f^{(n)}(x_0) < 0$, f *presenta en* x_0 *un máximo relativo*
- *Si* n *es par y* $f^{(n)}(x_0) > 0$, f *presenta en* x_0 *un mínimo relativo*
- *Si* n *es impar,* f *no tiene extremos relativos en* x_0

Concavidad y convexidad

Sea $f : [a,b] \longrightarrow I\!R$ una función continua.

Definición

Decimos que f es **convexa** *en $[a,b]$ si*

$$f(x) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\,, \qquad \forall x \in [a,b]$$

Definición

Decimos que f es **cóncava** *en $[a,b]$ si $(-f)$ es convexa en $[a,b]$*

Definición

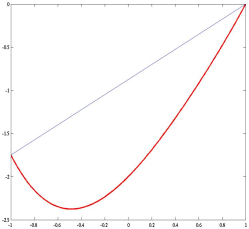
f tiene un **punto de inflexión** *en x_0 si cambia de cóncava a convexa (o viceversa) en x_0*

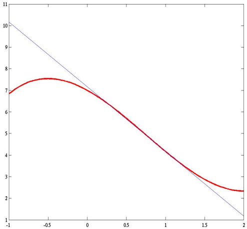
Concavidad y convexidad

Propiedad

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces f es convexa en $[a,b]$ si y sólo si f' es creciente en (a,b). Esto equivale a que $f'' \geq 0$, si f tiene derivada segunda.

- Respectivamente, f es cóncava en $[a,b]$ si y sólo si f' es decreciente en (a,b) (es decir, si existe derivada segunda, si y sólo si $f'' \leq 0$)





Polinomio de Taylor

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que admite derivada $(n+1)-$ésima continua.

Para $x_0 \in [a,b]$, definimos el **polinomio de Taylor** de grado n relativo a la función f y al punto x_0 como:

$$P_{n,f,x_0}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Entonces, para todo $x \in (a,b)$ existe $\xi \in (x,x_0)$ (ó $\xi \in (x_0,x)$, depende de cuál de estos dos puntos sea mayor) tal que:

$$f(x) = P_{n,f,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)} = P_{n,f,x_0}(x) + R_{n,f,x_0}(x).$$

Polinomio de Taylor. Observaciones

- Estamos generalizando el teorema del valor medio para el cálculo diferencial (teorema de Lagrange):

$$\exists c \in (a,b) \, / f(b) = f(a) + f'(c)(b-a),$$

  que puede entenderse como Taylor para $n = 0$ con $x_0 = a$ y $x = b$.
- Si $x_0 = 0$, el polinomio se denomina **de McLaurin**
- Hay que fijarse bien en que ξ no está determinado (lo único que sabemos es que $\xi \in (x, x_0)$ ó $\xi \in (x_0, x)$).
- $P_{n,f,x_0}(x)$ es una buena aproximación de $f(x)$ cuando x está cerca de x_0. Además, esta aproximación es mejor cuanto mayor sea n (el que x esté *lejos* de x_0 puede compensarse aumentando n).
- $P_{n,f,x_0}(x)$ es el único polinomio de grado $\leq n$ tal que en el punto x_0 coinciden él y sus derivadas hasta el orden n con f y sus derivadas.

Teorema de Taylor. Acotación del error

Debemos destacar que

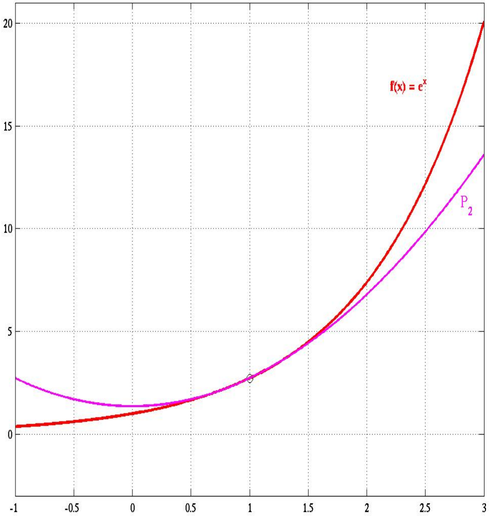
$$f(x) = P_{n,f,x_0}(x) + R_{n,f,x_0}(x) \Rightarrow f(x) - P_{n,f,x_0}(x) = R_{n,f,x_0}(x)$$

$$\Rightarrow \quad \left| f(x) - P_{n,f,x_0}(x) \right| = \left| R_{n,f,x_0}(x) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)} \right|.$$

No conocemos cuánto vale ξ, por lo tanto no conocemos cuánto vale $\left|R_{n,f,x_0}(x)\right|$... ¡pero podemos acotarlo! Como sabemos que ξ está entre x y x_0 (ó entre x_0 y x),

$$\left| f(x) - P_{n,f,x_0}(x) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)} \right| \leq \frac{\max\limits_{s \in (x,x_0)} \left| f^{(n+1)}(s) \right|}{(n+1)!} \left| x - x_0 \right|^{(n+1)}.$$

Polinomio de Taylor. Representación gráfica



Interpolación de Lagrange

Polinomio de interpolación de Lagrange

Dados

- $n+1$ puntos distintos $\quad x_0, x_1, \ldots, x_n;$
- $n+1$ valores cualesquiera $\quad \omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n;$

existe un único polinomio p_n de grado $\leq n$ tal que

$$p_n(x_i) = \omega_i\,, \quad \forall i = 0, 1, 2, \ldots, n\,.$$

Este polinomio p_n se denomina polinomio de interpolación de Lagrange en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ relativo a los valores $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n$.
En particular, si $\omega_i = f(x_i)$, decimos que p_n es el polinomio de interpolación de Lagrange de la función f en los puntos x_i.

Interpolación de Lagrange. Funciones de base

Polinomios fundamentales:

Para cada $i = 0, 1, \ldots, n$, existe un único polinomio ℓ_i de grado $\leq n$ tal que $\ell_i(x_k) = \delta_{ik}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$:

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

- $\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_n$ se dicen polinomios fundamentales de Lagrange de grado n

Fórmula de Lagrange:

El polinomio de interpolación de Lagrange en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ relativo a los valores $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n$ es

$$p_n(x) = \omega_0\, \ell_0(x) + \omega_1\, \ell_1(x) + \ldots + \omega_n\, \ell_n(x)$$

Diferencias divididas

- Diferencias divididas de orden 0:

$$[\omega_i] = \omega_i\,, \quad \forall i = 0,1,\ldots,n\,.$$

- Diferencias divididas de orden k $(k = 1,\ldots,n)$:

$$[\omega_i,\omega_{i+1},\ldots,\omega_{i+k}] = \frac{[\omega_i,\omega_{i+1},...,\omega_{i+k-1}] - [\omega_{i+1},...,\omega_{i+k}]}{x_i - x_{i+k}}, \forall i = 0,1,...,n-k$$

Ejemplos

- Diferencias divididas de orden 1:

$$[\omega_i,\omega_{i+1}] = \frac{\omega_i - \omega_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, \quad \forall i = 0,1,\ldots,n-1\,.$$

- Diferencias divididas de orden 2:

$$[\omega_i,\omega_{i+1},\omega_{i+2}] = \frac{[\omega_i,\omega_{i+1}] - [\omega_{i+1},\omega_{i+2}]}{x_i - x_{i+2}}, \quad \forall i = 0,1,\ldots,n-2\,.$$

Nota

Si $\omega_i = f(x_i)$ $(i = 0,1,\ldots,n)$, *denotamos*

$$f[x_i,\ldots,x_{i+k}] = [f(x_i),\ldots,f(x_{i+k})]$$

Interpolación de Lagrange. Diferencias divididas

Tabla de diferencias divididas

En la práctica, el cálculo de las diferencias divididas se dispone como

$$
\begin{array}{c|cccccc}
x_0 & \omega_0 & [\omega_0,\omega_1] & [\omega_0,\omega_1,\omega_2] & \dots & [\omega_0,\omega_1,\dots,\omega_n] \\
x_1 & \omega_1 & [\omega_1,\omega_2] & [\omega_1,\omega_2,\omega_3] & \dots & \\
x_2 & \omega_2 & [\omega_2,\omega_3] & [\omega_2,\omega_3,\omega_4] & \dots & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
x_{n-1} & \omega_{n-1} & [\omega_{n-1},\omega_n] & & & \\
x_n & \omega_n & & & &
\end{array}
$$

Nota

Después de construir la tabla, se puede añadir un dato adicional aprovechando los cálculos ya realizados

Interpolación de Lagrange. Diferencias divididas

Fórmula de Newton

El polinomio de interpolación de Lagrange en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ relativo a los valores $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n$ es

$$p_n(x) = [\omega_0] + [\omega_0, \omega_1](x - x_0) + [\omega_0, \omega_1, \omega_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$+ [\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Nota

En la práctica, se pueden calcular $p_0, p_1, \ldots, p_n$ sucesivamente como

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + [\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$