Cálculo

Octubre 2010

La integral indefinida

Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$

Definición

Diremos que F es **primitiva** *de f en I si*

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in I$$

Teorema

Si F y G son dos primitivas de una misma función f en un intervalo I, entonces,

$$\exists k \in \mathbb{R} \text{ tal que } F(x) = G(x) + k, \qquad \forall x \in I$$

La integral indefinida

Definición

Dada una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, llamaremos **integral indefinida** *de f al conjunto de todas sus primitivas, y escribiremos:*

$$\int f(x)\,dx = \left\{F \,/\, F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I\right\}$$

- En consecuencia, si conocemos una primitiva F de f, conocemos todas:

$$\int f(x)\,dx = \{F + k, \quad \forall k \in \mathbb{R}\}$$

Propiedad (linealidad de la integral)

- $\displaystyle\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
- $\displaystyle\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Integrales inmediatas

$$\int f(x)^m f'(x)\,dx = \frac{1}{m+1} f(x)^{m+1} + C, \quad m \neq -1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int a^{f(x)} f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\int [\sin f(x)] f'(x)\,dx = -\cos f(x) + C$$

$$\int [\cos f(x)] f'(x)\,dx = \sin f(x) + C$$

Integrales inmediatas

$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \arctan f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}\,dx = \arcsin f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}\,dx = -\cot f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \tan f(x) + C$$

$$\int [\tan f(x)] f'(x)\,dx = -\ln|\cos f(x)| + C$$

$$\int [\cot f(x)] f'(x)\,dx = \ln|\sin f(x)| + C$$

Integración por partes

$$\int u(x)v'(x)\,dx = (uv)(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$

o bien,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Es conveniente cuando el integrando es un producto de:

- polinomio y exponencial
- polinomio y *seno* o *coseno*
- exponencial y *seno* o *coseno*

Integración por cambio de variable

Sean:

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable,

$\varphi : [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ inyectiva, con derivada continua y tal que:

$$\varphi([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$$

Entonces

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

Sumas de Riemann

Sea un intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada.

Definición

Llamamos **partición** *P de $[a,b]$ a un conjunto de puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ que verifica:*

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

Definición

Dada una partición P, definimos

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \qquad\qquad m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

Definición

Llamamos **suma superior de Riemann** *y* **suma inferior de Riemann** *de la función f relativas a la partición P a:*

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) \qquad\qquad L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

Integral de Riemann

Definición

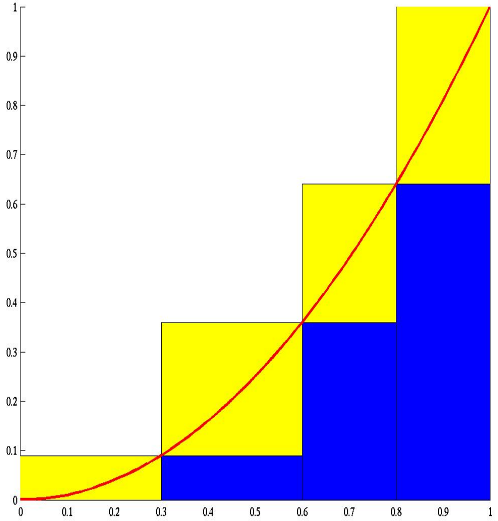
Dada una función f acotada, diremos que es integrable en $[a,b]$ en el sentido de Riemann si y sólo si:

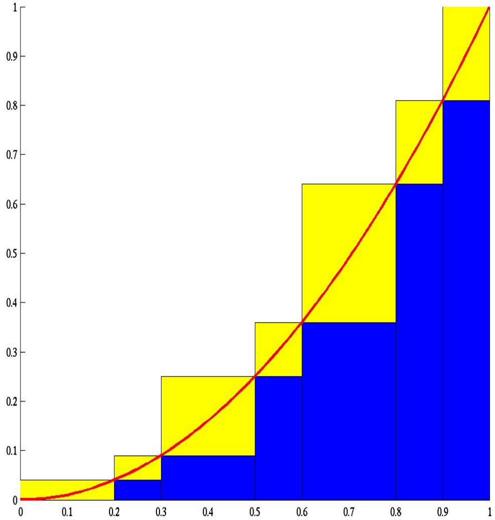
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists P \text{ partición de } [a,b] \text{ tal que } U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon.$$

Escribiremos $f \in \mathscr{R}[a,b]$.

Interpretación gráfica

Dada una función positiva en un intervalo $[a,b]$, su integral de Riemann representa el área encerrada por la curva $y = f(x)$ y el eje $y = 0$, entre las abscisas $x = a$ y $x = b$


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Teorema (de integrabilidad)

- *Toda función* **continua** *en* $[a,b]$ *es integrable en dicho intervalo*

  $\Longrightarrow$ *Toda función* **derivable** *es continua, y por lo tanto integrable*
- *Toda función* **monótona** *y* **acotada** *en* $[a,b]$ *es integrable en dicho intervalo*
- *Toda función* **acotada** *en* $[a,b]$ *que presenta en dicho intervalo un número finito de puntos de discontinuidad, es integrable en* $[a,b]$
- *Sea* f *una función* **integrable** *en* $[a,b]$ *en el sentido de Riemann, y tal que:*

  $$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a,b]$$

  Si g *es* **continua** *en* $[m,M]$*, entonces la* **función compuesta** $(g \circ f)$ *es integrable en* $[a,b]$

Propiedad

Sean $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$

- $(f \pm g) \in \mathscr{R}[a,b]$ *y* $(cf) \in \mathscr{R}[a,b]$, $\forall c \in \mathbb{R}$, *y se cumple:*

$$\int_a^b (f \pm g)\, dx = \int_a^b f\, dx \pm \int_a^b g\, dx \qquad \int_a^b cf\, dx = c \int_a^b f\, dx$$

- *Si* $f(x) \leq g(x)$ *en* $[a,b]$, *entonces* $\displaystyle\int_a^b f\, dx \leq \int_a^b g\, dx$
- *Si* $a < c < b$, *entonces* $f \in \mathscr{R}[a,c]$ *y* $f \in \mathscr{R}[c,b]$, *y se verifica:*

$$\int_a^b f\, dx = \int_a^c f\, dx + \int_c^b f\, dx$$

- *Si* $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in [a,b]$, *entonces* $\displaystyle\int_a^b f\, dx \leq M(b-a)$
- $fg \in \mathscr{R}[a,b]$
- $|f| \in \mathscr{R}[a,b]$, *y se cumple:* $\displaystyle\left| \int_a^b f\, dx \right| \leq \int_a^b |f|\, dx$

Teorema (fundamental del cálculo)

Sea $f \in \mathscr{R}[a,b]$*. Para* $a \leq x \leq b$*, llamemos:*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Entonces, $F \in \mathscr{C}[a,b]$*. Además, si* f *es continua en* $[a,b]$*,* F *entonces es derivable en* $[a,b]$*, y* $F'(x) = f(x)$*,* $\forall x \in [a,b]$*.*

También puede enunciarse de la siguiente manera:

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en I, entonces tiene primitivas en I; una de ellas es la integral definida F dada por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

donde $a \in I$ **es cualquiera**.

Regla de Barrow

Si $f \in \mathscr{R}[a,b]$ y existe una función F derivable en $[a,b]$ tal que $F' = f$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \quad F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Teorema (Integración por partes)

Si F y G son dos funciones derivables en $[a,b]$, y se tiene:

$$\begin{cases} F' = f \\ G' = g \end{cases} \qquad \textit{en } [a,b]$$

siendo f y g integrables en $[a,b]$, entonces,

$$\int_a^b F(x)\,g(x)\,dx = F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a) - \int_a^b f(x)\,G(x)\,dx$$

Teorema

Sea la función F dada por la integral definida:

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt$$

La derivada de F con respecto a x viene dada por:

$$F'(x) = f(b(x))\,b'(x) - f(a(x))\,a'(x)$$

Integración numérica

La integral de una función no se calcula de forma exacta cuando

- sólo conocemos sus valores en un número finito de puntos
- su primitiva no se expresa en términos de funciones elementales

  ejemplos: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; $f(x) = e^{-x^2}$
- su primitiva es muy costosa de calcular o de evaluar

  ejemplo: $f(x) = \frac{1}{(x-8)\sqrt{x^2-4x-7}}$

Integración numérica. Fórmulas simples

- Fórmula del rectángulo:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)f(x_0)\,, \quad x_0 \in [a,b];$$

en particular, si $x_0 = \frac{a+b}{2}$, se conoce como fórmula del punto medio o fórmula de Poncelet

- Fórmula del trapecio:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)$$

- Fórmula de Simpson:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\Big(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\Big)$$

Integración numérica. Fórmulas compuestas

1. Dividimos el intervalo de integración en subintervalos más pequeños

$$x_i = a + ih \quad (i = 0, 1, \ldots, n) \qquad \text{con } h = \frac{b-a}{n}$$

2. Aproximamos la integral mediante una fórmula simple en cada subintervalo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

- Fórmula del punto medio compuesta:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

- Fórmula del trapecio compuesta:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\Big(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\Big)$$

Integración impropia

Definición

La integral $\int_a^b f(x)\,dx$ *se denomina* **impropia** *si cumple al menos una de las condiciones siguientes:*

- *el intervalo* (a,b) *no es acotado*
- f *no está acotada en* (a,b)

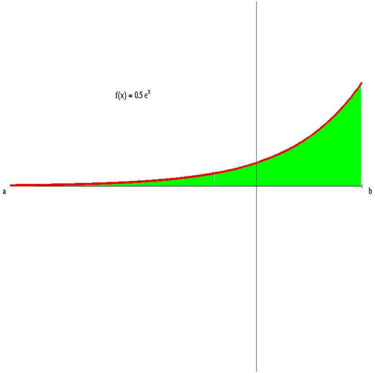
Clasificamos las integrales impropias en 3 tipos.

Integrales impropias de primera especie

Sea $f : (-\infty, b] \longrightarrow I\!R$ integrable en $[m,b]$, $\forall m \leq b$. Definimos:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{m \to -\infty} \int_{m}^{b} f(x)\,dx$$

si existe el límite, en cuyo caso la integral se denomina **convergente**.



Integrales impropias de primera especie

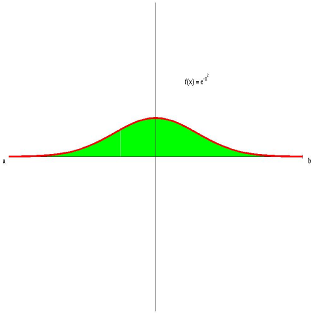
De igual forma se define:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_{a}^{M} f(x)\,dx$$

También definimos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

si ambas integrales convergen, en cuyo caso la definición no depende de $a \in \mathbb{R}$



Integrales impropias de segunda especie

Consideramos la función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ no acotada en uno de los extremos del intervalo, por ejemplo en a. Si f es integrable en $[t,b]$ para todo t tal que $a \leq t \leq b$, entonces definimos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

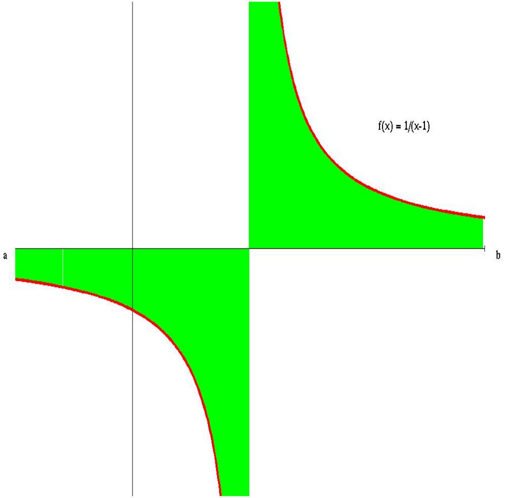
si existe el límite, en cuyo caso la integral se denomina **convergente**.

Si la función pierde el carácter acotado en un punto $c \in (a,b)$, definimos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

donde las dos últimas integrales se han descrito anteriormente.

Integrales impropias de segunda especie



Integrales impropias de tercera especie

Corresponden a un **intervalo no acotado** y una **función no acotada** en un número finito de puntos del intervalo.

Ejemplo

La integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\,dx$$

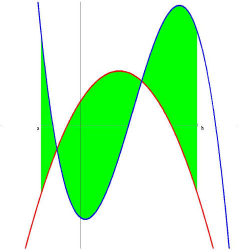
se reduce a los casos anteriores de la siguiente forma:

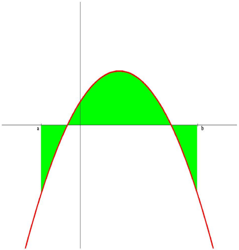
$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx}_{2^a\ especie} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx}_{1^a\ especie}$$

Área de superficies planas

Sean las funciones $f, g : [a, b] \longrightarrow I\!R$ integrables. Entonces el **área** A limitada por los grafos de ambas, las rectas $x = a$ y $x = b$ viene dada por:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$$



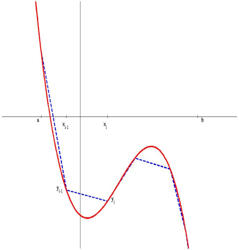


Caso particular: $g(x) = 0$, luego $A = \int_a^b |f(x)| \, dx$

Longitud de un arco de curva

Sea $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. La **longitud** ℓ del grafo de f que une los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$ es:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

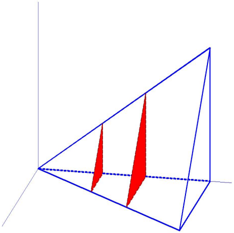


Volumen de un sólido

Supongamos un sólido que, al ser cortado por un plano perpendicular al eje OX, para cada $x \in [a,b]$ produce una sección de área $A(x)$.
El **volumen** de dicho cuerpo comprendido entre $x = a$ y $x = b$ es:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

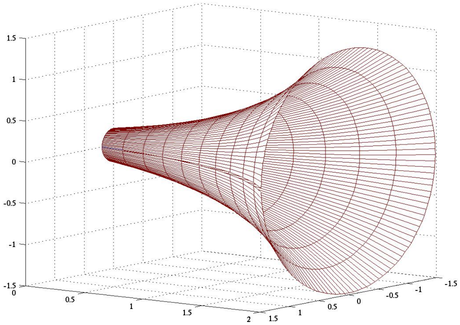
- De igual forma, se obtendría el volumen del cuerpo a partir de las áreas de las secciones producidas por planos perpendiculares al eje OY en el intervalo $[a,b]$.



Volumen de un sólido

Caso particular: volumen de revolución. Si giramos el grafo de $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ alrededor del eje OX, se construye una figura cuyo volumen es:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$



Superficie lateral de revolución

El **área lateral** del sólido construido al girar el grafo de $f : [a,b] \longrightarrow I\!R$ alrededor del eje OX, donde f es una función de clase $\mathscr{C}^1$, se calcula mediante:

$$A_L = 2\pi \int_a^b f(x)\,\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$