Cálculo

Noviembre 2010

Definición

Una **sucesión** *es una aplicación* $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Denotamos simplificadamente a_n en vez de $a(n)$.

El límite de la sucesión (a_n) es $l \in \mathbb{R}$ si para cada $\varepsilon > 0$, existe un número natural $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - l| < \varepsilon$ para todo $n > N$.

En caso de que el límite exista, se escribe $l = \lim_{n\to\infty} a_n$ y la sucesión se dice *convergente*.

Series numéricas

Dada una sucesión (a_n), podemos construir la sucesión de sumas parciales:

$$s_n = a_1 + \ldots + a_n.$$

Llamamos serie de término general (a_n) a la sucesión de sumas parciales (s_n).

La serie converge si lo hace la sucesión de sumas parciales. Si la serie es convergente denotaremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \text{lím}_{n\to\infty} s_n.$$

Series numéricas. Propiedades

Sean $\sum a_n$, $\sum b_n$ dos series convergentes y $c \in \mathbb{R}$. Entonces:

1) La serie suma $\sum(a_n + b_n)$ es convergente y

$$\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n.$$

2) La serie $\sum(ca_n)$ es convergente y

$$\sum(ca_n) = c\sum a_n.$$

Teorema (Condición necesaria de convergencia de series)

Si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Criterio del cociente (o de D'Alambert)

Sea $a_n > 0$ tal que

$$\text{lím}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

Entonces:

1) Si $r < 1$, la serie $\sum a_n$ converge.

2) Si $r > 1$ o $r = +\infty$, la serie $\sum a_n$ no converge.

2) Si $r = 1$, el criterio no decide.

Series numéricas. Criterios de convergencia

Criterio del cociente (o de D'Alambert): Ejemplos

1. $\sum \frac{n!}{n^n}$

$$\text{lím}\, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \text{lím}\, \frac{n^n}{(n+1)^n} = \text{lím}\, \frac{1}{(n+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1\,,$$

por tanto es convergente.

2. $\sum \frac{3^n}{3+n!}$

$$\text{lím}\, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \text{lím}\, \frac{3^{n+1}}{3+(n+1)!}\,\frac{3+n!}{3^n} = \text{lím}\, 3\,\frac{3/n!+1}{3/n!+n+1} = 0\,,$$

por tanto es convergente.

3. *Ejemplo en que el criterio no decide*. Si consideramos la serie armónica $\sum \frac{1}{n^s}$

$$\text{lím}\, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \text{lím}\, \frac{n^s}{(n+1)^s} = 1\,.$$

Criterio de la raíz (o de Cauchy)

Sea $a_n > 0$ y tal que existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$. Entonces:

1) Si $r < 1$, la serie $\sum a_n$ converge.

2) Si $r > 1$, la serie $\sum a_n$ no converge.

3) Si $r = 1$, el criterio no decide.

Series numéricas. Criterios de convergencia

Criterio de la raíz: Ejemplos

1. $\sum \frac{1}{(\log n)^n}$

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{1}{\log n} = 0 < 1\,,$$

   por tanto es convergente.

2. $\sum [\frac{n}{n+2}]^{n^2}$

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim [1 - \frac{2}{n+2}]^n = \lim \left(\left[1 - \frac{2}{n+2} \right]^{-(n+2)/2} \right)^{-2n/(n+2)} = e^{-2} < 1\,,$$

   por tanto es convergente.

3. *Ejemplo en que el criterio de la raíz no decide*. Si consideramos la serie armónica $\sum \frac{1}{n^s}$

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{1}{(n^{1/n})^s} = 1\,.$$

Series numéricas alternadas

Definición (Series alternadas)

Una serie es alternada si sus sumandos son alternativamente positivos y negativos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \,, \qquad \text{o bien} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \,,$$

con $a_n \geq 0$.

Teorema (Criterio de Leibnitz)

Una serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, $a_n \geq 0$, es convergente si su término general a_n converge montonamente hacia cero, en cuyo caso:

$$s_{2n} < \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n < s_{2n+1} \quad \text{y} \quad |\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n - s_n| < a_{n+1}$$

Series numéricas absolutamente convergentes

Definición (Convergencia absoluta)

Diremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente si la serie de los valores absolutos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + \ldots + |a_n| + \ldots,$$

es convergente.

Teorema (Convergencia absoluta $\Rightarrow$ convergencia)

Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.

Nota

La serie de valores absolutos es una serie de términos positivos y por tanto podemos aplicarle los criterios de convergencia de series de números positivos vistos.

Series de potencias

Definición

Una serie de potencias es una expresión de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$.

- *El número real* a_n *se le llama coeficiente* $n-$*ésimo de la serie de potencias.*
- *El punto* a *se denomina centro de la serie de potencias.*

Teorema

Dada la serie de potencias $\sum a_n (x-a)^n$ *hay tres posibilidades:*

1. *La serie sólo converge en* $x = a$.
2. *La serie converge absolutamente en todo* $x \in \mathbb{R}$.
3. *Existe un número real* $R > 0$ *tal que la serie converge absolutamente si* $|x-a| < R$ *y no converge si* $|x-a| > R$.

Nota

La convergencia en los puntos $x = a - R$ *y* $x = a + R$ *se estudia aparte.*

Series de potencias. Radio de convergencia

Definición

El radio de convergencia de una serie de potencias es:

1. $R = 0$ *si la serie sólo converge en* $x = a$.
2. $R = \infty$ *si la serie converge en todo* $\mathbb{R}$.
3. R *si la serie converge en* $(a - R, a + R)$ *y no converge en* $\mathbb{R} \setminus [a - R, a + R]$.

El intervalo donde converge la serie de potencias se llama campo de convergencia.

Nota

Mediante el Criterio del Cociente o el Criterio de la Raíz calculamos el radio de convergencia:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Series de potencias. Radio de convergencia

Ejemplos: cálculo del Radio de Convergencia

1. $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{n} = 0.$$

2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$$

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty$$

3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

es la serie geométrica que converge $\Leftrightarrow |x| < 1$. Por tanto $R = 1$ y el campo de convergencia es $(-1,1)$.