Ejercicios resueltos de Matemática discreta: Combinatoria, funciones generatrices y sucesiones recurrentes.

(4º Ingeniería informática. Universidad de La Coruña)

José Manuel Ramos González

Introducción

Estos ejercicios han sido propuestos por los profesores de Matemática discreta del cuarto curso de Ingeniería Informática en la universidad de La Coruña. Fueron resueltos por mí para ayudar a mi hijo, en ese momento estudiante de esa carrera.

En mi calidad de profesor de matemáticas de enseñanza secundaria, tuve previamente que estudiar el tema de funciones generatrices y sucesiones recurrentes para proceder a su resolución, ya que los tenía olvidados de mi época de estudiante.

Por ello quiero dejar de manifiesto en esta breve introducción que, si bien los resultados han sido contrastados en su mayoría, algunos (espero que en una ínfima cantidad) pueden contener algún error, tanto en su solución como en su transcripción al ser escritos, no responsabilizándome de las consecuencia que dichos errores puedan inducir.

J.M. Ramos
Pontevedra 2008

CAPÍTULO I

COMBINATORIA

1. ***Un número telefónico consta de siete cifras enteras. Supongamos que la primera cifra debe ser un número entre 2 y 9, ambos inclusive. La segunda y la tercera cifra deben ser números entre 1 y 9, ambos inclusive. Cada una de las restantes cifras es un número entre 0 y 9, ambos inclusive. ¿Cuántos números de teléfono distintos pueden formarse con estas condiciones?***

SOLUCIÓN:

Para la primera cifra tenemos 8 casos. Para la segunda y tercera juntas son $RV_{9,2}$ y las restantes serán $RV_{10,4.}$

En consecuencia el número de teléfonos es $\mathbf{8.9^2.10^4}$ = 6.480.000

2. ***Una empresa produce cerraduras de combinación. Cada combinación consta de tres números enteros del 0 al 99, ambos inclusive. Por el proceso de construcción de las cerraduras cada número no puede aparecer más de una sola vez en la combinación de la cerradura. ¿Cuántas cerraduras diferentes pueden construirse?***

SOLUCIÓN:

Una posible combinación sería 1, 23, 87 que sería distinta de 23, 1, 87, por lo que importa el orden. Por otra parte nos dicen que cada número no puede aparecer más de una sola vez, por lo que no hay repetición.

Se trata de $\mathbf{V_{100,3}}$ = 100.99.98

3. ***El consejo directivo de una empresa informática tiene 10 miembros. Se ha programado una próxima reunión de accionistas para aprobar una nueva lista de ejecutivos (elegidos entre los 10 miembros del consejo). ¿Cuántas listas diferentes, formadas por un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero, pueden presentar el consejo a los accionistas para su aprobación?Si tres miembros del consejo son ingenieros en informática ¿cuántas de las anteriores listas tienen:***

a) un ingeniero propuesto para la presidencia?

b) exactamente un ingeniero en la lista?

c) al menos un ingeniero en la lista?

SOLUCIÓN:

Llamemos a los miembros 1,2,3,..., 10

Una lista sería 1,2,3,4 otra sería 4,5,3,1 donde el orden importa ya que el primero sería el presidente, el segundo el vicepresidente, el tercero el secretario y el cuarto el tesorero, es decir que la lista 1,2,3,4 no sería la misma que la 4,3,2,1 ya que el primer caso el presidente sería 1 y en el segundo sería 4. Obviamente no hay repetición.

Así pues el número de listas es $\mathbf{V_{10,4}}$**= 10.000.**

a) Si tres miembros del consejo son ingenieros. ¿En Cuántas listas hay un ingeniero propuesto para la presidencia?

Fijamos el presidente (3 casos) y variamos a los restantes. Tendríamos entonces $3.V_{9,3}$ = 3.9.8.7

b) En cuantas listas hay exactamente un ingeniero.

Tenemos 3 ingenieros para 4 posiciones y los 7 miembros restantes los variamos de 3 en 3

$\mathbf{4.3.V_{7,3}}$

c) En cuantas listas hay por lo menos un ingeniero.

Calculamos todas las que no tienen ningún ingeniero y las restamos del total, es decir

$\mathbf{V_{10,4} - V_{7,4}}$

4. Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 7 se forman números de cinco cifras que no tengan ninguna repetida.a) ¿Cuántos números se pueden formar? b) ¿Cuántos de ellos son múltiplos de 4 y cuántos son múltiplos de 2?

SOLUCION:

a) Importa el orden y no hay repetición $V_{6,5} = 6.5.4.3.2 = 720$
b) Son múltiplos de 4 los que acaban en 12, 24, 32, 44, 52, 72. El caso 44 no nos vale por haber repetición.

Acaban en 12 $V_{4,3} = 4.3.2. = 24$. Por tanto los múltiplos de 4 son 5.24=**120**.

Como hay 720 casos, acaban en una cifra concreta de las 6, 720/6 = 120 y como para ser pares tienen que acabar en 2 o 4, el número de pares que hay es **240**.

5. Un profesor del Departamento de Computación tiene siete libros de programación diferentes en una estantería. Tres de los libros son de FORTRAN y los otros cuatro de PASCAL. ¿De cuántas formas puede ordenar el profesor estos libros si:

a) no hay restricciones?
b) los lenguajes se deben alternar?
c) todos los libros de FORTRAN deben estar juntos?
d) todos los libros de FORTRAN deben estar juntos y los libros de PASCAL también?

SOLUCIÓN:

a) Si constituyen siete libros diferentes, el resultado es $\mathbf{P_7 = 7!}$
b) Los lenguajes deben alternar, es decir $P_1F_1P_3F_2P_2F_3P_4$ y siempre deben estar colocados así variando solamente los subíndices. Por cada cuaterna de los de Pascal tengo $P_3 = 3!$ ternas de fortran. Por tanto la solución es $\mathbf{P_4.P_3 = 4!.3!}$
c) Si los libros de Fortran deben estar juntos, puedo considerar un bloque a los tres permutados entre sí, es decir, por ejemplo:

$P_1(FFF)P_2P_3P_4$

El número de casos que tendríamos en esa situación sería $P_5 = 5!$, pero a su vez los elementos de FFF permutan entre sí P_3 veces, por lo que el resultado pedido será:

$\mathbf{P_5.P_3 = 5!.3!}$

d) Si los de Fortran deben estar juntos y los de Pascal también tenemos los dos casos FFFPPPP o PPPPFFF, es decir P_2, pero a su vez el bloque FFF presenta P_3 casos y el bloque PPPP presenta P_4 casos. El resultado final sería:

$P_2.P_3.P_4 = 2!.3!.4!$

6. ¿De cuántas formas se pueden colocar las letras de la palabras POLIINSATURADO de modo que se mantenga el orden en que aparecen las vocales?

<u>SOLUCIÓN:</u>

Método 1

Consideremos 14 cajas donde contener las 14 letras que componen esa palabra y las numeramos para identificarlas del 1 al 14.

Como las vocales han de ir siempre en el orden O, I, I, A, U, A, O, para cada posición de las vocales lo que permutan son las consonantes, es decir P_7. Ahora solo nos falta ver cuantas posiciones posibles tengo para las vocales. Ahí intervienen las cajas. Asigno una caja a la vocal

Una posible solución sería 1234567, es decir que la O estaría en la caja 1, la I en la 2 y en la 3, en la 4 habría una A en la 5 una U, en la 6 una A y en la 7 una O.

Otra posible solución sería 1(13)8(11)623. Los ordenaría de menor a mayor y la O estaría en la caja 1, la caja 2 y 3 contendrían la I, la caja 6 contendría la A, la 8 sería para la U, la 11 para la A y la 13 para la O.

¿Cuántas de estas disposiciones de las cajas podemos hacer? Como podemos observar el orden de las cajas no importa, es decir que el caso 1234567 es el mismo que el 6543217 ya que las vocales tienen que conservar el orden inicial. Se trata entonces de $C_{14,7}$.

La solución del ejercicio es **$P_7.C_{14,7}$**

Método 2

Otra forma de plantearlo es así: Puesto que las vocales tienen siempre que estar en el mismo lugar puedo denominarlas a todas por V, independientemente de cuales sean. Tendría algunos casos como:

PVLVVNSVTVRVDV, PLVVVVRDTVVVNS, donde VVVVVVV siempre sería la secuencia OIIAUAO. Se ve fácilmente que se trata de permutaciones con repetición ya que importa el orden y existe repetición fija del elemento V, 7 veces y cada una de las restantes letras 1 vez.

$RP_{14;\,7,1,1,1,1,1,1,1}$

Obviamente el resultado, utilizando ambos métodos, conduce a la misma solución:

$14!/7!$

7. Una mano de bridge consta de 13 cartas del conjunto de 52 de la baraja francesa.
a) ¿Cuántas manos de bridge son posibles?
b) ¿De cuántas formas se le puede dar a una persona 6 picas y 5 corazones?

SOLUCIÓN:

La baraja francesa consta de 13 cartas por cada "palo", siendo los palos: picas, corazones, tréboles y rombos. Y las 13 cartas de cada palo son el AS(1), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K. Las tres últimas son el Jocker, Queen, King (el equivalente a la sota, caballo y rey de la baraja española).

a) El número posibles de manos es obviamente $\mathbf{C_{52,13}}$ pues el orden en que estén dadas las cartas no influye en la mano y no puede haber repetición por no haber cartas repetidas.
b) En una mano hay $C_{13,6}$ de dar 6 picas, pues tengo 13 picas para dar 6. Analogamente para dar 5 corazones serían $C_{13,5}$. Por último me quedan todavía dos cartas por dar para completar la mano, de donde puedo elegir cualquiera que no sea picas ni corazones, es decir 13 tréboles y 13 rombos, es decir $C_{26,2}$

   Por tanto el resultado final es $\mathbf{C_{13,6}.\ C_{13,5}.\ C_{26,2}}$

8. ***¿Cuántos números enteros entre 1000 y 9999 satisfacen que la suma de sus dígitos es exactamente 9?***

¿Cuántos de los números anteriores tienen todas sus cifras diferentes de cero?

SOLUCIÓN:

a) Es equivalente a ¿cuántas soluciones enteras tiene la ecuación
   $x + y + z + t = 9$ con $x \geq 1$ e $y,z,t \geq 0$

   Podemos utilizar la teoría de funciones generatrices (tema siguiente) y sería el coeficiente de x^9 en el producto $(x+x^2+x^3+\ldots)(1+x+x^2+x^3+\ldots)^3$, es decir el coeficiente de x^9 en $x(1-x)^{-4}$ que es el coeficiente de x^8 en $x(1-x)^{-4}$

$$-\binom{-4}{8} = \binom{11}{8} = C_{12}^{9}$$

b) Es equivalente a ¿cuántas soluciones enteras no negativas tiene la ecuación
   $x + y + z + t = 9$ con x,y,z y t enteros positivos

   Podemos utilizar la teoría de funciones generatrices (tema siguiente) y sería el coeficiente de x^9 en el producto $(x+x^2+x^3+\ldots)^4$, es decir el coeficiente de x^9 en $x^4(1-x)^{-4}$ que es el coeficiente de x^5 en $(1-x)^{-4}$ que es

$$-\binom{-4}{5} = \binom{8}{5} = C_{8}^{5}$$

9. En una heladería se sirven 7 tipos de helados.

a) ¿De cuántas formas distintas se pueden elegir 12 helados?

b) ¿De cuántas maneras se pueden elegir 12 helados si tiene que haber al menos uno de cada tipo?

<u>**SOLUCION:**</u>

a) Método 1:

   Tengo 7 cajas que representan los tipos de helado. Se trata de distribuir 12 elementos helados en las cajas

Por ejemplo: ** | *** | | **** | | *** | significa que hay dos helados del tipo 1, 3 del tipo 2, ninguno del tipo 3, 4 del tipo 4, ninguno del tipo 5, 3 del tipo 6 y ninguno del tipo 7.

En total tenemos $\mathbf{RP_{18;\,12,6} = 18!\,/\,12!.6!}$

Método 2:

Sería equivalente a averiguar cuántas soluciones enteras tiene la ecuación x + y + z + t + u + v + w = 12, con x,y,z,t,u,v,w no negativos.

Podemos utilizar la teoría de funciones generatrices (tema siguiente) y sería el coeficiente de x^{12} en el producto $(1+x+x^2+x^3+\dots)^7$, es decir el coeficiente de x^{12} en $(1-x)^{-7}$ que es

$$\binom{-7}{12}=\binom{18}{12}$$

b)

Sería equivalente a averiguar cuántas soluciones enteras tiene la ecuación

x + y + z + t + u + v + w = 12, con x,y,z,t,u,v,w ≥1.

Podemos utilizar la teoría de funciones generatrices (tema siguiente) y sería el coeficiente de x^{12} en el producto $(x+x^2+x^3+\dots)^7$, es decir el coeficiente de x^{12} en $x^7(1-x)^{-7}$ que es el coeficiente de x^5 en $(1-x)^{-7}$ que es

$$-\binom{-7}{5}=\binom{11}{5}$$

10. Un estudiante debe responder siete de las diez preguntas de un examen. ¿De cuántas formas puede hacer su elección si:

a) no hay restricciones
b) debe contestar las dos primeras preguntas
c) debe responder al menos cuatro de las seis primeras preguntas

SOLUCIÓN:

a) Si las preguntas las numeramos del 1 al 10, una posible respuesta sería 9834567, que es la misma aunque alteremos el orden y no hay posible repetición. Se trata de combinaciones de 10 tomadas 7 a 7, es decir $\mathbf{C_{10,7}}$

b) Si debe responder a las dos primeras, todos los casos comenzarán por 12----- y me quedan cinco preguntas por responder de las 8 restantes, por tanto serán $\mathbf{C_{8,5}}$

c) Si tiene que responder al menos cuatro de las seis primeras tenemos:

Que responda exactamente 4 de las 6 primeras: $C_{6,4} \,.\, C_{4,3}$

Que responda exactamente 5 de las 6 primeras: $C_{6,5} \,.\, C_{4,2}$

Que responda exactamente 6 de las 6 primeras: $C_{6,6} \,.\, C_{4,1}$

El resultado por tanto será: $\mathbf{6C_{6,4} + 6C_{6,5} + 4}$

11. En un lote de 100 ordenadores se sabe que 10 de ellos contienen circuitos integrados defectuosos. Se selecciona una muestra de 7 ordenadores de forma aleatoria para realizar un chequeo. ¿Cuántas muestras contienen:

a) Tres circuitos defectuosos?

b) Al menos un circuito defectuoso?

SOLUCIÓN:

a) De los 7, tres han debido ser elegidos de los 10 defectuosos, es decir $C_{10,3}$ y el resto serán 4 de los 90 en buen estado. Por tanto la solución es $\mathbf{C_{10,3} \cdot C_{90,4}}$

b) Al menos un circuito defectuoso, serían todos menos los que no tuvieran ningún circuito defectuoso, esto es:

$$\mathbf{C_{100,7} - C_{90,7}}$$

12. Si una partida de bridge es una partición ordenada de 52 cartas en cuatro grupos de 13 cartas cada uno. ¿Cuántas partidas distintas de bridge se pueden jugar con una baraja?

SOLUCION:

Al primer jugador podemos darle $C_{52,13}$ manos, al segundo $C_{39,13}$, al tercero $C_{26,13}$ y al último 1.

Solución: $\mathbf{C_{52,13} \cdot C_{39,13} \cdot C_{26,13}}$

13. ¿De cuántas formas se puede distribuir un conjunto con 2n elementos en n conjuntos de 2 elementos?

SOLUCIÓN:

Pensemos que tenemos n cajas y en cada caja tenemos que poner dos de los 2n elementos dados.

Para la primera caja tendríamos $C_{2n,2}$, para la segunda $C_{2n-2,2}$ .... y así sucesivamente hasta llegar a la última que nos quedarían 2 elementos que colocar para 2, es decir $C_{2,2}$

La solución será:

$$C_{2n,2} \cdot C_{2n-2,2} \cdot C_{2n-4,2} \cdot C_{2n-6,2} \ldots C_{4,2} \cdot C_{2,2} = \frac{2n!}{(2!)^n}$$

También se puede expresar como $RP_{2n;\ 2,2,\ldots,2\ (n\ \text{veces})}$

14.¿De cuántas formas puede sacar un jugador cinco naipes de una baraja francesa y obtener un full (trío más pareja)?; ¿y dobles parejas?

SOLUCIÓN:

Los trios posibles que puede sacar son por carta (es decir un trío de ases, un trío de jotas...etc) $C_{4,3}$ y como hay 13 cartas distintas en cuanto a numeración, en total serían $13.C_{4,3}$. Por cada trío sacado podemos sacar (analogamente razonado) $13.C_{4,2}$.

El total de fulles es de $169.C_{4,3}.C_{4,2}$..

En cuanto a las dobles parejas, razonando con en el caso anterior serían:

$13.C_{4,2}$. para la primera pareja. Para la segunda pareja serían las mismas. y para la carta que resta, serían 44 cartas ya que no pueden estar ninguna de las figuras que forman parte de las parejas anteriores (es decir que si las dobles parejas fueran de J y de Q, en la quinta carta no podría haber ninguna J (4) ni ninguna Q (4)), es decir 8, quedándome 44 cartas.

Solución $169.C_{4,2}.C_{4,2}$.. 44

15, ¿Cuántas permutaciones de las letras de la palabra MISSISSIPPI no contienen dos o más letras I consecutivas?

SOLUCION

En total tenemos $RP_{11;\,1,4,4,2}$

Tienen dos o más consecutivas aquellas que al menos contienen el bloque II manteniéndose siempre junto. Consideremos pues las dos I consecutivas como una sola I y tendremos 3 I tan solo. Por tanto todos los casos en los que van a aparecer la I consecutiva dos o tres veces es

$RP_{10;\,1,,4,3,2}$

La solución al problema será: $RP_{11;\,1,4,4,2} - RP_{10;\,1,4,3,2}$

16 ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 12 libros distintos entre cuatro niños de modo que:

a) cada niño reciba tres libros?

b) los dos niños mayores reciban 4 libros y los dos menores dos cada uno?

SOLUCIÓN:

Método 1 (interpretado por combinaciones)

a) El primer niño puede recibir $C_{12,3}$, el segundo $C_{9,3}$, el tercero $C_{6,3}$ y el último $C_{3,3}$

Por tanto la solución es $C_{12,3}.. C_{9,3} . C_{6,3} .C_{3,3}$

b) El mayor recibe 4 libros por tanto pueden distribuirsele $C_{12,4}$, al otro por tanto le quedan $C_{8,4}$, al tercero le quedan $C_{4,2}$ y al último $C_{2,2}$

La solución es $C_{12,4} . C_{8,4} . C_{4,2}$ .1 **Método 2** (interpretado por permutaciones con repetición)

a) En este caso llamo A B C D a los niños. Supongamos que están así designados de mayor a menor edad:

Fijo los libros del 1 al 12, y voy asignando los niños a los libros. Una posible asignación sería AAA BBB CCC DDD, otra sería ABBAABCDCDCD. De esta manera repartiría los 12 libros entre los 3 niños y las formas distintas de hacerlo serían

$RP_{12;\,3,3,3,3,}$

b) En esta ocasión los repartos serían del tipo AAAABBBBCCDD, es decir que la repetición sería 4 para A, 4 para B y 2 para C y D. Por tanto todos los posibles repartos serían:

$RP_{12;\,4,4,2,2}$

17. Determínese el coeficiente de x^9y^3 en:

a) $(x + y)^{12}$, b) $(x + 2y)^{12}$, c) $(2x + 3y)^{12}$.

SOLUCION:

a) $\binom{12}{i} y^i x^{12-i} = coef.x^9y^3$ de donde i=3. El coeficiente es $\binom{12}{3} = 220$

b) $\binom{12}{i} (2y)^i x^{12-i} = coef.x^9y^3$; i = 3. El coeficiente es $\binom{12}{3} 2^3 = 1760$

c) $\binom{12}{i} (3y)^i (2x)^{12-i} = coef.x^9y^3$; i=3. El coeficiente es $\binom{12}{3} 3^3 2^9 = 3041280$

*18. **Determínese el coeficiente de***

a) xyz^2 en $(x + y + z)^4$, b) xyz^2 en $(2x – y – z)^4$, c) $xyz^{–2}$ en $(x – 2y + 3z^{–1})^4$

SOLUCIÓN:

a) $((x+y)+z)^4 = \sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} z^i (x+y)^{4-i}$. Necesariamente i=2. Faltaría por conocer el coeficiente de xy en $(x+y)^2$ que es 2. Entonces el resultado final sería $\binom{4}{2}.2 = 12$

b) $\left((2x-(y+z)\right)^4 = \sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} (-1)^i (y+z)^i (2x)^{4-i}$; 4-i = 1; i=3, que en x obtiene coeficiente 2

El problema se reduce a calcular el coeficiente de yz^2 para $(y+z)^3$ que es 3

$\binom{4}{3} 3.2(-1)^3 =$-24

c) $((x-2y)+3z^{-1})^4 = \sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} (3z^{-1})^i (x-2y)^{4-i}$; obviamente –i = -2, de donde i=2 cuyo coeficiente en z^{-1} es 9. Falta averiguar el coeficiente de xy en $(x-2y)^2$ que es -4.

El resultado es $\binom{4}{2}9.(-4) = -216$

19. Determínese la suma de todos los coeficientes de (x + y)^{10}.

SOLUCION:

a) $\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i} = (1+1)^{10} = 2^{10} = 1024$

20. Dado un número real x y un entero positivo n, muéstrese que

a) $1 = (1+x)^n - \binom{n}{1}x(1+x)^{n-1} + \binom{n}{2}x^2(1+x)^{n-2} - ... + (-1)^n\binom{n}{n}x^n$

b) $1 = (2+x)^n - \binom{n}{1}(x+1)(2+x)^{n-1} + \binom{n}{2}(x+1)^2(2+x)^{n-2} - ... + (-1)^n\binom{n}{n}(x+1)^n$

SOLUCION:

a) El desarrollo de la derecha es $\sum_{i=0}^{n}(-1)^n\binom{n}{i}x^i(1+x)^{n-i}$ que es el binomio de Newton de

$((1+x)-x)^n = 1$.

b) El desarrollo de la derecha es $\sum_{i=0}^{n}(-1)^n\binom{n}{i}(1+x)^i(2+x)^{n-i}$ que es el binomio de Newton de

$((2+x)-(1+x))^n = 1$

21. Determina las formas diferentes en que se pueden elegir 20 monedas de cuatro grandes recipientes que contienen monedas de diferente denominación. Cada recipiente contiene un solo tipo de monedas.

SOLUCION:

Método 1:

Si denomino a los recipientes 1, 2, 3, 4. Una posible elección de monedas sería 11111122222333333344 (es decir 6 del recipiente 1, 5 del recipiente 2, 7 del recipiente 3, 2 del recipiente 4) Es obvio que no importa el orden y hay repetición variable, entonces estamos ante $RC_{4,20} = \binom{23}{20}$

Método 2:

Equivale a saber cuantas soluciones enteras tiene la ecuación

x + y + z + t = 20, donde x, y, z, t representan el número de monedas de cada tipo que tomo del recipiente 1, 2, 3 y 4 respectivamente:

Podemos utilizar la teoría de funciones generatrices (tema siguiente) y sería el coeficiente de x^{20} en el producto $(1+x+x^2+x^3+\ldots)^4$, es decir el coeficiente de x^{20} en $(1-x)^{-4}$ que es

$$\binom{-4}{20} = \binom{23}{20}$$

22. ¿De cuántas formas se pueden colocar doce canicas del mismo tamaño en cinco recipientes distintos si:

a) todas las canicas son negras?
b) cada canica es de distinto color?

SOLUCION:

a) Método 1

Utilizando las barras y asteriscos

** | **** |*** | * | ** $RP_{16;12,4}$

o asignando recipiente a las canicas

112222333455 $RC_{5,12} = \binom{16}{12}$

Método 2

Equivale a saber cuantas soluciones enteras tiene la ecuación

$x + y + z + t + w = 12$, donde x, y, z, t representan el número de canicas que coloco en el recipiente 1, 2, 3, 4 y 5 respectivamente:

Podemos utilizar la teoría de funciones generatrices (tema siguiente) y sería el coeficiente de x^{12} en el producto $(1+x+x^2+x^3+\ldots)^5$, es decir el coeficiente de x^{12} en $(1-x)^{-5}$ que es

$$\binom{-5}{12} = \binom{16}{12}$$

b) Si son todas de distinto color

Razonando por asignación de recipiente tendríamos y fijando las canicas, que el caso

112222333455 no sería igual al caso 552222333411 ya que si suponemos que la primera canica es verde, en el primer caso estaría en el primer recipiente, mientras que en el segundo caso estaría en el 5º recipiente.
¿Cómo se interpretaría el caso 111111111111? Que todas las canicas estarían en el primer recipiente

Serían $RV_{5,12} = 5^{12}$

23. ***¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene el sistema de ecuaciones*** $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=37$; $x_1+x_2+x_3=6$?
¿Cuántas de estas soluciones verifican que $x_1, x_2, x_3 > 0$?

SOLUCION:

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=37$ tiene tantas soluciones como

$RP_{43;\,37,6}$

$x_1+x_2+x_3=6$ tiene tantas soluciones como

$RP_{8;\,6,2}=28$. Por cada una de ellas hemos de resolver

$x_4+x_5+x_6+x_7=31$ que son $RP_{34,31,3}=5984$

En total 28.5984 = 167.552

¿Cuántas verifican que $x_1, x_2, x_3 > 0$?

Coeficiente de grado x^6 de $(x+x^2+...)^3$, que equivale al coeficiente de x^3 de $(1-x)^{-3}$ que es $-\binom{-3}{3}=\binom{5}{3}=10$

La solución es 10.5984 = 59840

24. ¿Cuántos números naturales de cuatro cifras significativas tienen sus cuatro dígitos diferentes en orden creciente (como 1347, y 3689) o en orden decreciente (como 6432 y9531)? ¿Cuántos números naturales de cuatro cifras significativas tienen sus cuatro dígitos en orden no decreciente (como 3467, 2256 y 4777) o no creciente (como 7532, 9966, 5552)?

SOLUCION

Primero calculamos el número de los que tienen sus cuatro dígitos en orden creciente:
El 0 no puede aparecer por lo que el resultado pedido son $C_{9,4}=\binom{9}{4}$

Analicemos este resultado. Como en las combinaciones no importa el orden en que se tomen los elementos, la combinación 3245 a efectos de nuestro problema es la 2345, es decir que si pensamos en cualquier combinación de los números del 1 al 9 tomados de 4 en 4, la podemos ordenar, obteniendo una serie con cuatro dígitos en orden creciente.

Sin embargo en el caso de que el orden sea decreciente el número es $C_{10,4}=\binom{10}{4}$ porque ahora el 0 puede formar parte de la serie, por ejemplo 0876, sería a efectos de nuestro problema el número 8760 que tiene todos sus dígitos en orden decreciente.
Así pues el resultado sería $\binom{9}{4}+\binom{10}{4}$

En orden no decreciente serían $RC_{9,4}=\binom{12}{4}$ ya que ahora se permite la repetición y

En orden no creciente sería $RC_{10,4}=\binom{13}{4}$. Si los sumamos estaríamos repitiendo los casos 0000, 1111, 2222, ... 9999, por lo que hay que restar 10. El resultado sería:
$\binom{12}{4}+\binom{13}{4}-10$

25 ¿De cuántas formas se pueden seleccionar nueve bolas de una bolsa que contiene tres bolas rojas, tres verdes, tres azules y tres blancas?

SOLUCION.

Equivale a resolver la ecuación $x + y + z + t = 9$, *con* $0\leq x, y, z, t \leq 3$

Haciéndolo por funciones generatrices, sería el coeficiente de x^9 de $(1+x+x^2+x^3)^4$ que coincide con el coeficiente de x^9 de $(1-x^4)^4(1-x)^{-4}$

Grado de $(1-x^4)^4$	Coeficiente	Grado de $(1-x)^{-4}$	Coeficiente
0	1	9	$-\binom{-4}{9}=\binom{12}{9}$
4	$-\binom{4}{1}=4$	5	$-\binom{-4}{5}=\binom{8}{5}$
8	$\binom{4}{2}=6$	1	$-\binom{-4}{1}=\binom{4}{1}$

El resultado es $\binom{12}{9}-4.\binom{8}{5}+24=220-224+24=20$

26. ¿Cuántos números de la seguridad social (secuencias de nueves dígitos) tienen al menos una vez cada uno de los dígitos 1, 3 y 7?

SOLUCION:

No tienen el 1: $RV_{9,9}$; No tienen el 2 los mismos; No tienen el 3 los mismos: No tienen el 1 y el 2 $RV_{8,9}$. No tienen el 1 y el 3 los mismos y el 2 y el 3 los mismos. No tienen el 1, 2, y 3, $RV_{7,9}$ Por tanto tenemos:

$$RV_{10,9} - 3.RV_{9,9} + 3RV_{8,9} - RV_{7,9} = 10^9 - 3.9^9 + 3.\ 8^9 - 7^9$$

27. Si se lanza un dado cinco veces, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las cinco tiradas sea 20?

SOLUCION:

Los casos favorables son las soluciones de la ecuación

$$x + y + z + t + u = 20 \quad \text{con} \quad 1 \le x,y,z,t,u \le 6$$

Es el coeficiente de x^{20} de la función $(x+x^2+...+x^6)^5$ que es el grado x^{15} de $(1-x^6)^5(1-x)^{-5}$

Grado de $(1-x^6)^5$	Coeficiente	Grado de $(1-x)^{-5}$	Coeficiente
0	1	15	$-\binom{-5}{15} = \binom{19}{15}$
6	-5	9	$-\binom{-5}{9} = \binom{13}{9}$
12	$\binom{5}{2} = 10$	3	$-\binom{-5}{3} = \binom{7}{3}$

Solucion: $\binom{19}{15} - 5\binom{13}{9} + 10\binom{7}{3} = 3876\text{-}3575\text{+}350 = 651$

Como los casos posibles son $6^5 = 7776$
La probabilidad pedida es 651/7776 = 0,0837 o del 8,37%

28. Determina el número de soluciones enteras para $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ donde $-5 \le x_i \le 10$ para todo i, $1 \le i \le 4$

SOLUCION.

Equivalente a calcular el número de soluciones enteras para $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 39$ donde $0 \le x_i \le 15$ para todo i, $1 \le i \le 4$

Es el coeficiente de x^{39} de $(1+x+x^2+ ...x^{15})^4 = (1-x^{16})^4(1-x)^{-4}$

Grado de $(1-x^{16})^4$	Coeficiente	Grado de $(1-x)^{-4}$	Coeficiente
0	1	39	$-\binom{-4}{39}=\binom{42}{39}$
16	-4	23	$-\binom{-4}{23}=\binom{26}{23}$
32	$\binom{4}{2}=6$	7	$-\binom{-4}{7}=\binom{10}{7}$

Solución es $\binom{42}{39}-4\binom{26}{23}+6\binom{10}{7}=11480-10400+720=1800$

CAPÍTULO II

FUNCIONES GENERATRICES

1. ***Determina la función generatriz para el número de formas de distribuir 35 monedas de un euro entre cinco personas, si (a) no hay restricciones; (b) cada persona obtiene al menos un euro; (c) cada persona obtiene al menos dos euros; (d) la persona de mayor edad obtiene al menos 10 euros; y (e) las dos personas más jóvenes deben obtener al menos 10 euros.***

SOLUCIÓN: La solución se corresponde con el coeficiente de x^{35} de:

a) $(1+x+x^2+ ...)^5$; b) $(x+x^2+ ...)^5$; c) $(x^2+x^3+ ...)^5$
d) $(x^{10}+ x^{11}+ .....).(1+x+x^2+...)^4$
e) $(x^{10}+ x^{11}+ .....)^2. (1+x+x^2+...)^2$

2. ***Encuentre las funciones generatrices para las siguientes sucesiones. (Grimaldi)***

a) $\binom{8}{0},\binom{8}{1}...\binom{8}{8}$ ***b)*** $\binom{8}{1},2\binom{8}{2},3\binom{8}{3}...,8\binom{8}{8}$
c) 1, -1, 1, -1, 1, ... ***d) 0, 0, 0, 1,1,1,1,1,1...***
e) 0, 0, 0, 6, -6, 6, -6, 6... ***f) 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...***
g) 1, 2, 4, 8, 16 ... ***h) 0, 0, 1, a, a^2, a^3, ..., con $a\neq 0$***

SOLUCIÓN:

a) Obviamente son los coeficientes del desarrollo de $\mathbf{(1+x)^8}$

b) Si derivamos $f(x) = \sum_{i=0}^{8}\binom{8}{i}x^i$, obtendremos $f'(x) = \sum_{i=1}^{8} i.\binom{8}{i}x^{i-1}$, cuyos coeficientes son los de la sucesión dada. Dado que la función generatriz de f(x) es $(1+x)^8$, entonces la función generatriz de la sucesión dada es $\mathbf{8(1+x)^7}$

c) $f(x) = 1 – x + x^2 – x^3 + x^4 ...$ (1)

$x.f(x) = \quad x – x^2 + x^3 – x^4 ...$ (2)

Sumando ambas expresiones obtenemos $(1+x)f(x) = 1$, de donde

$$\mathbf{f(x) = 1/(1+x)}$$

d) $f(x) = x^3 + x^4 + x^5 + ... = x^3(1+ x + x^2 + ...)$. Ahora bien, es fácilmente demostrable (inténtese como ejercicio) que la función generatriz de la sucesión constante k, k, k, k, ... es k/(1-x); en particular para 1,1,1, será 1/(x-1), de donde:

$$\mathbf{f(x) = x^3/ (1-x)}$$

(En general la función generatriz de la sucesión 0, ..., 0, 1,1,1,1,1,1... siendo 0 los k primieros términos, es $f(x) = x^k/ (1-x)$)

e) $f(x) = 6x^3 – 6x^4 + 6x^5 - ... = 6x^3 (1 – x + x^2 - ...)$ y aplicando el apartado c) la función generatriz pedida es:

$$\mathbf{f(x) = 6x^3/ (1+x)}$$

f) $f(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + ...$ (1).

$-x^2.f(x)= - x^2 - x^4 - x^6 - ...$ (2)

Sumando ambas expresiones obtenemos $(1-x^2)f(x) = 1$, de donde

$f(x) = 1/ (1-x^2)$

g) $f(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + ...$ (1)
$-2xf(x)= - 2x - 4x^2 - 8x^3 - 16x^4 - ...$ (2)

Sumando ambas expresiones obtenemos $(1-2x) f(x) = 1$, de donde

$f(x) = 1/ (1-2x)$

h) $f(x) = x^2 + ax^3+ a^2 x^4 + a^3x^6 + ... = x^2.(1 + ax + a^2x^2 + ...)$. El segundo factor $1 + ax + a^2x^2 + ...$, es una generalización del apartado g), de donde

$f(x) = x^2/(1-ax)$

3. ***Determine la sucesión generada por cada una de las siguientes funciones generatrices. (Grimaldi)***
a) $f(x) = (2x-3)^3$ b) $f(x) = x^4/(1-x)$ c) $f(x) = x^3/(1-x^2)$
d) $f(x) = 1/(1+3x)$ e) $f(x) = 1/(3-x)$ f) $f(x)=1/(1-x)+3x^7-11$

<u>SOLUCIÓN:</u>

a) Desarrollando el cubo del binomio, se obtiene la sucesión de coeficientes, en este caso en orden decreciente

$\binom{3}{i}(-1)^i.3^i.2^{3-i}$ para i=0...3, es decir: 8, -36, 54, -27

La sucesión pedida es **-27, 54, -36, 8, 0, 0, 0, 0, ...**

b) $f(x) = x^4. 1/(1-x)$; dado que $1/(1-x)$ es la función generatriz de la sucesión constante 1,1,1,1, resulta que el polinomio generatriz resultante es $x^4(1+x+x^2+ ...)$, por tanto la sucesión pedida es **0, 0, 0, 0, 1,1,1,1,1,1.....**

c) $f(x) = x^3. 1/(1-x^2)$; dado que $1/(1-x^2)$ es la función generatriz de la serie polinómica, como vimos en el apartado c) del ejercicio anterior, $1 + x^2 + x^4 +...$
resulta que el polinomio generatriz resultante es $x^3 (1 + x^2 + x^4 + ...)$, de donde la sucesión pedida es **0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1 ....**

d) $f(x) = 1/ (1+3x)$. Dividiendo en la forma usual, obtenemos como cociente: $1 - 3x + 9x^2 - 27x^3 + ...$ por tanto la sucesión es $a_n = (-1)^{n+1}.3^{n-1}$, es decir

1, -3, 9, -27, 81, -243, ...

e) $f(x) = 1/ (1-3x)$. Dividiendo, obtenemos como cociente:
$1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + ...$ por tanto la sucesión es $a_n = 3^{n-1}$, es decir

1, 3, 9, 27, 81, 243, ...

f) $f(x)=1/(1-x)+3x^7-11$. Como $1/(1-x)$, es la función generatriz de la sucesión constante 1, la dada genera la sucesión

-10, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1....

4. ***En cada uno de los siguientes ejercicios, f(x) es la función generatriz de la sucesión a_o, a_1, a_2, ... y g(x) la de la sución b_0, b_1, b_n.... Exprese g(x) en términos de f(x), para:***
   a***) $b_3 = 3$ y $b_n = a_n$ con $n\neq 3$*** ***b) $b_3 = 3$, $b_7=7$ y $b_n = a_n$ con $n\neq 3$ y $n\neq 7$***

   c) $b_1=1$, $b_3 =3$ y $b_n=2a_n$ con $n\neq 3$ y $n\neq 1$
   d) $b_1=1$, $b_3 =3$, $b_7 = 7$ y $b_n=2a_n+5$ con $n\neq 3$, 1, 7

(Grimaldi)
<u>SOLUCIÓN</u>:

a)

$$f(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + ...$$
$$g(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + 3x^3 + a_4x^4 + ...$$

restando ambas expresiones resulta $f(x) – g(x) = (a_3-3)x^3$, por tanto

$$\mathbf{g(x) = f(x) + (3-a_3)x^3}$$

b)

$$f(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + ...$$
$$g(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + 3x^3 + a_4x^4 + ...+7x^7 + ...$$

restando ambas expresiones resulta $f(x) – g(x) = (a_3-3)x^3+(a_7-7)x^7$ por tanto

$$\mathbf{g(x) = f(x) + (3-a_3)x^3+(7-a_7)x^7}$$

c)

$$f(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + ...$$
$$g(x) = 2a_o + x + 2a_2x^2 + 3x^3 + 2a_4x^4 + ...$$

$$2f(x) – g(x) = (2a_1-1)x + (2a_3-3)x^3$$

$$\mathbf{g(x) = 2f(x) - (2a_1-1)x - (2a_3-3)x^3}$$

5) Determine la constante en el desarrollo de $(3x^2 – (2/x))^{15}$ (Grimaldi)

<u>SOLUCIÓN.</u>

$(3x^2 – (2/x))^{15} = \sum_{i=0}^{15}(-1)^i(2/x)^i(3x^2)^{15-i}$. La constante es el coeficiente de grado 0, es decir el coeficiente de x^0 y como la potencia genérica de x en el sumatorio es $x^{-i}.(x^2)^{15-i} = x^{30-3i}$, igualando exponentes $30- 3i = 0$, de donde $i = 10$.

Por tanto el coeficiente de x^0 en el desarrollo es $(-1)^{10}.2^{10}.3^5$ = **248832**

6) a) Encuentre el coeficiente de x^7 en $(1 + x + x^2 + x^3 + ...)^{15}$
b) Encuentre el coeficiente de x^7 en $(1 + x + x^2 + x^3 + ...)^n$ para n entero positivo. (Grimaldi)

SOLUCIÓN:
a) Como la función generatriz de 1,1,1, es 1/(1-x). El problema se reduce a hallar el coeficiente de x^7 en el desarrollo de $(1/(1-x))^{15} = (1-x)^{-15}$, resultando ser el número combinatorio $\binom{-15}{7}(-1)^7 = \binom{21}{7}$ (*)

(*) Recordemos que $\binom{-n}{r} = (-1)^r \binom{n+r-1}{r}$, siendo n un entero positivo. (demostración hecha en el Grimaldi)

b) Al igual que antes el problema se reduce a hallar el coeficiente de x^7 en el desarrollo de $(1/(1-x))^n = (1-x)^{-n}$, resultando ser el número combinatorio $\binom{-n}{7}(-1)^7 = \binom{n+6}{7}$

7). Encuentre el coeficiente de x^{50} en $(x^7 + x^8 + x^9 + ...)^6$ (Grimaldi)

SOLUCIÓN:

La función generatriz asociada a $x^7 + x^8 + x^9 + ...$ es, como vimos en el ejercicio 1, apartado d) $x^7/(1-x)$.
Por tanto el coeficiente de grado 50 de $(x^7/(1-x))^6 = x^{42}.(1-x)^{-6}$ es el coeficiente de grado 8 de $.(1-x)^{-6}$, que es $\binom{-6}{8}(-1)^8 = \binom{13}{8} = 1287$

8. Encuentre el coeficiente de x^{20} en $(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^5$ (Grimaldi)

SOLUCION:
En primer lugar calculemos la función generatriz asociada a la base:
$f(x) = x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = x^2 (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$
Sea $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ y $-x.g(x) = - x - x^2 - x^3 - x^4 – x^5$. Sumando ambos obtengo $g(x) = (1-x^5)/(1-x)$; por tanto $f(x) = x^2(1-x^5)/(1-x)$.
El problema se reduce a hallar el coeficiente de x^{20}, del desarrollo $[x^2(1-x^5)/(1-x)]^5 = x^{10}. (1-x^5)^5.(1-x)^{-5}$, que se reduce a su vez a hallar el coeficiente de x^{10} en $(1-x^5)^5.(1-x)^{-5}$.
Observemos que los grados de x en el primer factor solo pueden ser 0 o enteros positivos múltiplos de 5, por tanto los casos que se pueden presentar son los siguientes

Grados en factor $(1-x^5)^5$	Coeficiente	Grados en factor $(1-x)^{-5}$	Coeficiente
0	1	10	$\binom{-5}{10}=\binom{14}{10}$
5	$\binom{5}{1}(-1)^1$	5	$\binom{-5}{5}(-1)^5=\binom{9}{5}$
10	$\binom{5}{2}$	0	1

Así pues el coeficiente pedido es $\binom{14}{10}-\binom{5}{1}\binom{9}{5}+\binom{5}{2}$

9). Para n entero positivo, encuentre en ($1+x+x^2$)$(1+x)^n$ el coeficiente de (a) x^7 ; (b) x^8 y (c) x^r con $0\le r\le n+2$, y r entero. (Grimaldi)

SOLUCIÓN:

a)

Grados en factor $1+x+x^2$	Coeficiente	Grados en factor $(1+x)^n$	Coeficiente
0	1	7	$\binom{n}{7}$
1	1	6	$\binom{n}{6}$
2	1	5	$\binom{n}{5}$

Solución: $\binom{n}{7}+\binom{n}{6}+\binom{n}{5}$

b)

Grados en factor $1+x+x^2$	Coeficiente	Grados en factor $(1+x)^n$	Coeficiente
0	1	8	$\binom{n}{8}$
1	1	7	$\binom{n}{7}$
2	1	6	$\binom{n}{6}$

Solución: $\binom{n}{7}+\binom{n}{6}+\binom{n}{8}$

c)

Grados en factor $1+x+x^2$	Coeficiente	Grados en factor $(1+x)^n$	Coeficiente
0	1	r	$\binom{n}{r}$
1	1	r-1	$\binom{n}{r-1}$
2	1	r-2	$\binom{n}{r-2}$

Solución: $\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r-2}$

10). Encuentre el coeficiente de x^{15} en los siguiente ejercicios.
a) $x^3(1-2x)^{10}$ b) $(x^3-5x)/(1-x)^3$ c) $(1+x)^4/(1-x)^4$

SOLUCIÓN:

a) Obviamente 0 pues el máximo grado de ese desarrollo es 13.
b) Lo descomponemos en $x.(x^2-5)(1-x)^{-3}$. Así pues el problema se reduce a hallar el coeficiente de x^{14} en $.(x^2-5)(1-x)^{-3}$

Grados en factor (x^2-5)	Coeficiente	Grados en factor $(1-x)^{-3}$	Coeficiente
0	-5	14	$\binom{-3}{14}=\binom{16}{14}$
2	1	12	$\binom{-3}{12}=\binom{14}{12}$

Así pues el coeficiente pedido es $-5.\binom{16}{14}+\binom{14}{12}$

c)

Grados en factor $(1+x)^4$	Coeficiente	Grados en factor $(1-x)^{-4}$	Coeficiente
0	$\binom{4}{0}=1$	15	$-\binom{-4}{15}=\binom{18}{15}$
1	$\binom{4}{1}=4$	14	$\binom{-4}{14}=\binom{17}{14}$
2	$\binom{4}{2}=6$	13	$-\binom{-4}{13}=\binom{16}{13}$
3	$\binom{4}{3}=4$	12	$\binom{-4}{12}=\binom{15}{12}$
4	$\binom{4}{4}=1$	11	$\binom{-4}{11}=\binom{14}{11}$

Así pues el coeficiente pedido es $\binom{18}{15}+4\binom{17}{14}+6\binom{16}{13}+4\binom{15}{12}+\binom{14}{11}$

11). ¿De cuántas formas se pueden asignar dos docenas de robots idénticos a 4 líneas de montaje de modo que a) al menos 3 robots se asignen a cada linea b) al menos 3 pero no más de 9

SOLUCIÓN:

a) La generatriz es $(x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + ...)^4$. Siendo la solución el coeficiente de x^{24}.

La función generatriz $x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + ... = x^3(1+x+x^2 ...)$ es

$x^3 (1-x)^{-1}$. Y el coeficiente de x^{24} en $[x^3(1-x)^{-1}]^4$ equivale a hallar el coeficiente de x^{12} en $(1-x)^{-4}$ que es $\binom{-4}{12}=\binom{15}{12}$

El valor pedido sería $\binom{15}{12}=455$

b) En las cuatro lineas tendríamos
$(x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + ... + x^9)^4$. Siendo la solución el coeficiente de x^{24}.

La función generatriz de $x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + ... + x^9$ es $x^3(1+x+ ... +x^6)$ que es

$x^3 (1-x^7)(1-x)^{-1}$. Y el coeficiente de x^{24} en $[x^3 (1-x^7)(1-x)^{-1}]^4$ equivale a hallar el coeficiente de x^{12} en $(1-x^7)^4(1-x)^{-4}$. Los casos son:

Grados en factor $(1-x^7)^4$	Coeficiente	Grados en factor $(1-x)^{-4}$	Coeficiente
0	1	12	$\binom{-4}{12}=\binom{15}{12}$
7	$-\binom{4}{1}=-4$	5	$-\binom{-4}{5}=\binom{8}{5}$

El valor pedido sería $\binom{15}{12}-4\binom{8}{5}$

12) ¿De cuántas formas pueden repartirse 3000 sobres idénticos, en paquetes de 25, entre cuatro grupos de estudiantes, de modo que cada grupo reciba al menos 150 sobres, pero no más de 1000 sobres?

SOLUCIÓN: 3000 sobres en paquetes de 25 son 120 paquetes, 150 sobres en paquetes de 25 son 6 y 1000 sobres iguales en paquetes de 25 son 40.

El problema se reduce a repartir 120 paquetes iguales en cuatro grupos de estudiantes de modo que cada grupo reciba al menos 6 paquetes pero no más de 40.

Es decir $(x^6 + x^7 + ... + x^{40})^4$, siendo la solución del problema el coeficiente de x^{120}

Función generatriz de $x^6 + x^7 + ... + x^{40} = x^6(1+x+...+x^{34})$ que es

$x^6(1-x^{35})(1-x)^{-1}$ Por tanto, el coeficiente de x^{120} de $[x^6(1-x^{35})(1-x)^{-1}]^4$ es el coeficiente de x^{96} de $(1-x^{35})^4(1-x)^{-4}$. Los casos son:

Grados en factor $(1-x^{35})^4$	Coeficiente	Grados en factor $(1-x)^{-4}$	Coeficiente
0	1	96	$\binom{-4}{96}=\binom{99}{96}$
35	$-\binom{4}{1}=-4$	61	$-\binom{-4}{61}=\binom{64}{61}$
70	$\binom{4}{2}=6$	26	$\binom{-4}{26}=\binom{29}{26}$

Sol: $\binom{99}{96}-4\binom{64}{61}+6\binom{29}{26}$

13). Se distribuyen dos cajas de refrescos, con 24 botellas de un tipo, y 24 de otro, entre cinco peritos que realizan pruebas de sabores. ¿De cuántas formas pueden distribuirse las 48 botellas de manera que cada perito reciba: a) al menos dos botellas de cada tipo; b) al menos dos botellas de un tipo y tres del otro?

a) $(x^2 + x^3 + ...)^5(x^2 + x^3 + ...)^5$.

La función generatriz del problema sería $(x^2 + x^3 + ... + x^{16})^{10}$, y la solución sería el coeficiente de x^{48}

$[x^2.(1-x)^{-1}]^{10}$ equivale a calcular el coeficiente de x^{28} de $(1-x)^{-10}$

que es: $\binom{-10}{28} = \binom{37}{28}$

b) Para las del tipo A $(x^2 + x^3 + ...)^5$

y para las del tipo B $(x^3 + ...)^5$ ya que al menos han de recibir 3 La función generatriz que resuelve el problema es $(x^2 + x^3 + ...)^5 . (x^3 + ...)^5$ y mediante las generatrices correspondientes obtendríamos:

$[x^2(1-x)^{-1}]^5.[x^3(1-x)^{-1}]^5 = x^{25}.(1-x)^{-10}$

Se trata de hallar el coeficiente de x^{13} de $(1-x)^{-10}$

que es

$-\binom{-10}{13} = \binom{22}{13}$

14). Si se lanza 12 veces un dado, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los resultados sea 30?

SOLUCIÓN:

En cada vez tenemos: $x^1 + x^2 + ... + x^6$. Al lanzar 12 veces, la función generatriz del problema es $(x^1 + x^2 + ... + x^6)^{12}$. Los casos favorables (es decir suma 30) lo constituye el coeficiente de x^{30}

La función generatriz asociada es $f(x) = x.(1-x^6)/(1-x)$

El problema se reduce a calcular el coeficiente de x^{30} de $[x.(1-x^6)/(1-x)]^{12}$ que se reduce a su vez a calcular el coeficiente de x^{18} de $.(1-x^6)^{12}.(1-x)^{-12}$

Los casos que se presentan son:

Grados en factor $(1-x^6)^{12}$	Coeficiente	Grados en factor $(1-x)^{-12}$	Coeficiente
0	1	18	$\binom{-12}{18}=\binom{29}{18}$
6	$-\binom{12}{1}=-12$	12	$\binom{-12}{12}=\binom{23}{12}$
12	$\binom{12}{2}=66$	6	$\binom{-12}{6}=\binom{17}{6}$
18	$-\binom{12}{3}=-220$	0	1

Los casos favorables son: $\binom{29}{18}-12\binom{23}{12}+66\binom{17}{6}-220$ = 19.188.950

Los casos posibles son 6^{12} = 2.176.782.336

Por tanto la probabilidad pedida es: **0,008815**

15). Carolina recoge dinero entre sus primas para darle una fiesta a su tía. Si ocho de sus primas prometen dar cada una 2, 3, 4 o 5 dólares y las otras dos dan cada una 5 o 10 dólares, ¿cuál es la probabilidad de que Carolina junte exactamente 40 dólares?

SOLUCIÓN:

Los casos favorables son aquellos en los que Carolina juntará 40 dólares, que viene dado por el coeficiente de x^{40} de $(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^8.(x^5 + x^{10})^2$, que, haciendo las funciones generatrices de los polinomios base de los dos factores, resulta ser el coeficiente de x^{40} de la siguiente expresión:

$[x^2.(1-x^4)(1-x)^{-1}]^8.\ [x^5(1+x^5)]^2 = x^{26}.(1-x^4)^8.(1+x^5)^2(1-x)^{-8}$
reduciéndose a calcular el coeficiente de x^{14} de $.(1-x^4)^8.(1+x^5)^2(1-x)^{-8}$

Tenemos

Gr en $.(1-x^4)^8$	Coef	Gr en $(1+x^5)^2$	Coef	Gr en $(1-x)^{-8}$	Coef
0	1	0	1	14	$\binom{21}{14}$
0	1	5	2	9	$\binom{16}{9}$
0	1	10	1	4	$\binom{11}{4}$
4	-8	0	1	10	$\binom{17}{10}$
4	-8	5	2	5	$\binom{12}{5}$
4	-8	10	1	0	1
8	28	0	1	6	$\binom{13}{6}$
8	28	5	2	1	$\binom{8}{1}$

si multiplicamos por filas las columnas sombreadas y sumamos todos los productos, obtendríamos los casos favorables, que nos da:

116280 + 22880 + 330 – 155584 – 12672 -8 + 48048 + 448 = 19722

Los casos posibles son $RV_{4}^{8}.RV_{2}^{2} = 262144$

La probabilidad pedida es: **0,07523**

16). ¿De cuántas formas puede seleccionar Tomás n canicas de un gran surtido de canicas azules, rojas y amarillas, si la selección debe incluir un número par de las azules?

SOLUCIÓN:

Elección de las rojas $1+x+x^2+x^3+ ....$
Elección de las amarillas $1+x+x^2+x^3+ ....$
Elección de las azules $1+ x^2 + x^4 + ...$ (Considera que 0 es par y por tanto admite la posibilidad de que no haya bolas azules en la elección)

La solución es el coeficiente de x^n en la función $(1+x+x^2+ ...)^2.(1+x^2 + x^4+...)$ cuya función generatriz asociada es $(1/(1-x))^2.(1/(1-x^2)$. Se reduce al coeficiente de x^n de $(1/(1-x))^2(1/(1-x^2)$.

$$\frac{1}{(1-x)^2(1-x^2)} = \frac{1}{(1-x)^3(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-x)^3} + \frac{D}{1+x}$$

$1 = A(1+x)(1-x)^2 + B (1-x^2) + C (1+x) + D (1-x)^3$
Si x=1, tenemos 1=2C; de donde C= ½
Si x= -1, tenemos 1= 8D, de donde D=1/8
Si x=0, tenemos 1=A + B + 5/8; A+B=3/8
Si x=2, tenemos 1 = 3A-3B +3/2 - 1/8; A-B=-1/8; de las dos últimas ecuaciones se obtiene A=1/8 y B=1/4

$$\frac{1}{(1-x)^2(1-x^2)} = \frac{1/8}{1-x} + \frac{1/4}{(1-x)^2} + \frac{1/2}{(1-x)^3} + \frac{1/8}{1+x} = \left(\frac{1}{8}\right)\sum_{i=0}^{\infty} x^i + \left(\frac{1}{4}\right)\left[\binom{-2}{0} + \binom{-2}{1}(-x) + \binom{-2}{2}(-x)^2 + ...\right]$$

$$.+\left(\frac{1}{2}\right)\left[\binom{-3}{0} + \binom{-3}{1}(-x) + \binom{-3}{2}(-x)^2 + ...\right] + \left(\frac{1}{8}\right)\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i.x^i$$

siendo el coeficiente de grado n (Se calcula el coef de grado en cada sumando) :

$$\frac{1}{8} + \left(\frac{1}{4}\right)\binom{-2}{n} + \frac{1}{2}\binom{-3}{n} + \frac{1}{8}(-1)^n = \frac{1}{8}(1+(-1)^n) + \frac{1}{4}.\binom{n+1}{n} + \frac{1}{2}\binom{n+2}{n}$$

17). ¿Cómo puede María repartir 12 hamburguesas y 16 perritos calientes entre sus hijos Ricardo, Pedro, Cristóbal y Jaime, de modo que Jaime reciba al menos una hamburguesa y tres perritos calientes, mientras que sus hermanos reciben, cada uno, al menos dos hamburguesas, pero a lo sumo cinco perritos calientes?

Reparto de hamburguesas (en el orden Jaime, Ricardo, Pedro y Cristóbal)
$(x + x^2 + ...)(x^2 + ...)^3$
Reparto de perritos calientes (en el orden Jaime, Ricardo, Pedro y Cristóbal)
$(x^3 + x^2 + ...)(1 + x + ... + x^5)^3$

El número de reparticiones de hamburguesas en las condiciones dadas es el coeficiente de x^{12} de $x./(1-x).[x^2/(1-x)]^3 = x^7.(1-x)^{-4}$ que se reduce al cálculo del coeficiente de x^5 en $(1-x)^{-4}$, resultando ser:

$$-\binom{-4}{5} = \binom{8}{5}$$

Es decir que hay 56 formas de repartir las hamburguesas en las condiciones expresadas.

El número de reparticiones de perritos calientes en las condiciones dadas es el coeficiente de x^{16} de $x^3/(1-x).[(1-x^6)/(1-x)]^3 = x^3.(1-x^6)^3.(1-x)^{-4}$ que se reduce al cálculo del coeficiente de x^{13} en $(1-x^6)^3(1-x)^{-4}$, resultando ser:

Gr en $.(1-x^6)^3$	Coef	Gr en $(1-x)^{-4}$	Coef
0	1	13	$-\binom{-4}{13} = \binom{16}{13}$
6	-3	7	$-\binom{-4}{7} = \binom{10}{7}$
12	3	1	$-\binom{-4}{1} = \binom{4}{1}$

Hay en total $\binom{16}{13} - 3\binom{10}{7} + 3\binom{4}{1} = 212$ formas de repartir los perritos

Por tanto los repartos posibles serían 56 . 212 = **11872**

18). Se tiene una bolsa con 5 canicas amarillas, 4 rojas y 5 blancas. Se eligen 1, 3 ó 5 amarillas, 2, 3 ó 4 rojas y 1, 4 ó 5 blancas, ¿de cuántas formas se pueden elegir 10 canicas?

<u>SOLUCION:</u>

Es el coeficiente de x^{10} de
$(x+x^3+ x^5).(x^2+ x^3 + x^4).(x + x^4+x^5) = x^4(1 +x^2+ x^4)(1+x+x^2).(1+x^3+x^4)$ que se reduce al coeficiente de x^6 de $(1 +x^2+ x^4)(1+x+x^2).(1+x^3+x^4)$ que se corresponde con

024, 204, 213, 420, que son 4 casos.

19). Calcula la función generatriz para el número de formas de tener n céntimos de euro en (a) monedas de uno y cinco céntimos de euro; (b) monedas de uno, cinco y diez céntimos de euro.

SOLUCIÓN:

a) Coeficiente de grado n de $(1+x+x^2+ \dots)(1+x^5 +x^{10} + x^{15}+\dots)$
b) Coeficiente de grado n de $(1+x+x^2+ \dots)(1+x^5 +x^{10} + x^{15}+\dots)(1+x^{10} +x^{20} + x^{30}+\dots)$

20). Determina la función generatriz para el número de soluciones enteras de las ecuación $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 20$ donde $-3 \le c_1$, $-3 \le c_2$, $-5 \le c_3 \le 5$, $0 \le c_4$.

SOLUCIÓN:
Para evitar los valores negativos, sumo 3 a cada valor de c_1 y c_2 y sumo 5 a cada valor de c_3, con lo que al miembro de la derecha he de sumarle 3+3+5 obteniendo

$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 =31$ donde $0 \le c_1$, $0 \le c_2$, $0 \le c_3 \le 10$, $0 \le c_4$.
que equivaldría al problema de repartir 31 canicas entre cuatro niños de modo que a uno de ellos le toque a lo sumo 10 canicas.

Sería el coeficiente de x^{31} de $(1+x+x^2+ \dots)^3(1+x+x^2+ \dots +x^{10})$

Coeficiente de x^{31} de $(1-x)^{-3}(1-x^{11})/(1-x)$; o sea $(1-x^{11})(1-x)^{-4}$

Gr en .$(1-x^{11})$	Coef	Gr en $(1-x)^{-4}$	Coef
0	1	31	$-\binom{-4}{31} = \binom{34}{31}$
11	-1	20	$\binom{-4}{20} = \binom{23}{20}$

Solución es $\binom{34}{31} - \binom{23}{20}$

21) Calcule el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación:
$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 12$, donde $-2 \le c_1 \le 6, \quad -3 \le c_2 \le 4, \quad c_3 \ge 0, \quad c_4 \ge 0$
(Ejercicio propuesto en el Examen de Febrero 2009 en La Coruña)

SOLUCIÓN:
Como nos piden las *no negativas*, el problema consiste en averiguar el número de soluciones enteras de la ecuación dada para $0 \le c_1 \le 6, \quad 0 \le c_2 \le 4, \quad c_3 \ge 0, \quad c_4 \ge 0$
Coeficiente de grado 12 de $(1+x+\dots+x^6)(1+x+\dots+x^4)\ (1+x+x^2+\dots)^2$
Coeficiente de grado 12 de $(1-x^7)(1-x^5)(1-x)^{-4}$

Gr en .(1-x^7)	Coef	Gr en (1-x^5)	Coef	Gr en $(1-x)^{-4}$	Coef
0	1	0	1	12	$\binom{-4}{12}=\binom{15}{12}$
7	-1	0	1	5	$-\binom{-4}{5}=\binom{8}{5}$
0	1	5	-1	7	$-\binom{-4}{7}=\binom{10}{7}$
7	-1	5	-1	0	1

La solución es: $\binom{15}{12}-\binom{8}{5}-\binom{10}{7}+1=280$

21.) Hállense a, b, k de modo que (a + bx)^k sea la función generatriz para la sucesión 1, 2/5, 12/25, 88/125, ... (Grimaldi)

SOLUCIÓN:

$(a+bx)^k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}b^i a^{k-i}.x^i$, por tanto:

$$\binom{k}{0}b^0a^k=1;\ \binom{k}{1}b^1a^{k-1}=\frac{2}{5};\ \binom{k}{2}b^2a^{k-2}=\frac{12}{25};\ \binom{k}{3}b^3a^{k-3}=\frac{88}{125}$$

lo que conduce a las siguientes ecuaciones respectivamente

(1) $a^k=1$, de donde se obtiene que a =1
(2) $kb=2/5$
(3) $\frac{k(k-1)b^2}{2}=\frac{12}{25}$
(4) $\frac{k(k-1)(k-2)b^3}{6}=\frac{88}{125}$

Dividiendo (4) entre (3) se obtiene: $\frac{(k-2)b}{3}=\frac{88}{125}$, que junto con la ecuación (2), resulta k= -1/5 y b = -2.

22). Hállense los cinco primeros términos de las siguientes expansiones
a) (1 + 2x)$^{1/3}$ ***b) (2-x)$^{1/4}$***

SOLUCIÓN:

a) f(0)=1
f'(x) = 2(1/3)$(1 + 2x)^{-2/3}$ = (2/3)$(1 + 2x)^{-2/3}$ f'(0)=2/3

f''(x) = $(-4/9)(1 + 2x)^{-5/3}$ f''(0)=-4/9

f'''(x)= $(20/27)(1 + 2x)^{-8/3}$ f'''(0)= 20/27

f'v(x)= $(-160/81)(1 + 2x)^{-11/3}$ $f^{iv}(0) = -160/81$

Los cinco primeros términos de la expansión (de McLaurin) pedida son

$$1+\frac{2}{3}x+\frac{-4/9}{2!}x^2+\frac{20/27}{3!}x^3+\frac{-160/81}{4!}x^4 =$$

$$1+\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}x^2+\frac{10}{81}x^3-\frac{20}{243}x^4$$

b) f(0)=$\sqrt[4]{2}$

f'(x) = $(-1/4)(2-x)^{-3/4}$ de donde f'(0) = $\frac{-1}{4\sqrt[4]{8}}$

f''(x) = $(-3/16)(2-x)^{-7/4}$ de donde f''(0) = $\frac{-3}{32\sqrt[4]{8}}$

f'''(x) = $(-21/64)(2-x)^{-11/4}$ de donde f'''(0) = $\frac{-21}{256\sqrt[4]{8}}$

$f^{v}(x) = (-231/256)(2-x)^{-15/4}$ de donde $f^{v}(x) = \frac{-231}{1848\sqrt[4]{8}}$

La expansión de McLaurin de grado 4 es

$$\sqrt[4]{2}-\frac{1}{4\sqrt[4]{8}}x-\frac{3}{64\sqrt[4]{8}}x^2-\frac{21}{1536\sqrt[4]{8}}x^3-\frac{231}{44352\sqrt[4]{8}}x^4$$

23). ¿De cuántas formas se pueden seleccionar siete números no consecutivos entre el 1 y el 50?

SOLUCIÓN.

Una posible elección sería 3,5,7,9,11,13, 15
No valdría 3,5,7,9,11,8,18 ya que el 7 y el 8 son consecutivos.

Entendido así el problema, lo abordaremos del siguiente modo:

Tómese un caso, por ejemplo 1,5,7,9,11,13,50, ordénense y establecer las diferencias consecutivas, teniendo en cuenta que el primer término resta al 1 y el último al 50 en todos los casos. Este caso nos daría:

0,4,2,2,2,2,37,0 cuya suma es 49

Otro ejemplo sería 13, 34, 21, 15, 5, 8, 11. Los ordenamos 5, 8, 11, 13, 15, 21, 34, cuyas diferencias consecutivas nos darían

4, 3, 3, 2, 2, 6, 13, 16, cuya suma es 49

Se tiene que todos los casos que buscamos tienen la propiedad de que ordenados y restados consecutivamente nos dan 49. Y estas restas tienen que ser siempre mayores que 1 ya que si hubiese algún 1 querría decir que tendríamos dos números consecutivos, salvando los extremos que pueden ser 0 o 1 (ya que si una serie empieza por 1 genera un 0 en la primera diferencia y si empieza por 2 genera un 1 el la primera diferencia. Igualmente si acaba en 50 genera un cero en la última diferencia y si acaba en 49 genera un 1 en la última diferencia)

El problema se reduce a resolver el número de soluciones de la ecuación

$x_1 + x_2 + ... + x_8 = 49$ con $x_i \geq 2$ con i=2,...7 y $x_1 \geq 0$, $x_8 \geq 0$. Equivalente a repartir 49 canicas entre 8 niños tocándole al menos 2 a 6 de ellos.

El resultado sería el coeficiente de x^{49} de $(x^2 + x^3 + ...)^6(1+x+x^2+...)^2$
coeficiente de x^{49} $x^{12}(1-x)^{-6} (1-x)^{-2}$, coeficiente de x^{37} de $(1-x)^{-8}$ que es

$$-\binom{-8}{37} = \binom{44}{47}$$

25). ***Comprueba que el número de descomposiciones de un entero positivo n en sumandos impares coincide con el número de descomposiciones de n en sumandos distintos.***

<u>SOLUCIÓN:</u>

El número de descomposiciones de un entero positivo n en sumandos impares es el coeficiente de x^n de

$$(1+x+x^2+x^3+...)(1+x^3+x^6+...)(1+x^5+x^{10}+...)...$$

$$\frac{1}{1-x}.\frac{1}{1-x^3}.\frac{1}{1-x^5}... = \prod_{i=0}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2i+1}}$$

El número de descomposiciones de n en sumandos distintos es el coeficiente de x^n de

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)....$$

y dado que

$$1+x = \frac{1-x^2}{1-x} \qquad 1+x^2 = \frac{1-x^4}{1-x^2} \qquad 1+x^3 = \frac{1-x^6}{1-x^6} \quad ...$$

Tenemos que

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3).... = \frac{1-x^2}{1-x}.\frac{1-x^4}{1-x^2}.\frac{1-x^6}{1-x^3}... = \frac{1}{1-x}.\frac{1}{1-x^3}.\frac{1}{1-x^5}... = \prod_{i=0}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2i+1}}$$

siendo ambas funciones generatrices iguales.

28). En $f(x) = [1/(1-x)].[1/(1-x^2)].[1/(1-x^3)]$ el coeficiente de x^6 es 7. Interprétese este resultado en función de particiones de 6.

SOLUCIÓN.
Quiere decir que el número de particiones de 6 en donde solo intervienen el 1, 2 y 3 es 7.

29). Hállese la función generatriz para el número de soluciones enteras de

a) $2w + 3x + 5y + 7z = n$ con $w, x, y, z \geq 0$
b) $2w + 3x + 5y + 7z = n$. con $w \geq 0$, $x,y \geq 4$, $z \geq 5$
c) $2w + 3x + 5y + 7z = n$ con $2 \leq w \leq 4 \leq x \leq 7 \leq y \leq 10 \leq z$

SOLUCIÓN:

a) equivale a averiguar la función generatriz para las particiones de n en las que sólamente intervengan el 2, 3, 5 y 7

es decir: $(1+x^2+x^4+x^6+...)(1+x^3+x^6+x^9+...)(1+x^5+x^{10}+...)(1+x^7+x^{14}+...)$, o sea
$f(x) = [1/(1-x^2)].[1/(1-x^3)][1/(1-x^5)].[1/(1-x^7)]$

b)
$(1+x^2+x^4+x^6+...)(x^{12}+x^{15}+x^{18}+...)(x^{20}+x^{25}+...)(x^{35}+x^{42}+...)$, es decir:

$$\frac{1}{1-x^2}\frac{x^{12}}{1-x^3}\frac{x^{20}}{1-x^5}\frac{x^{35}}{1-x^7} = x^{68}.f(x)$$

c) $(x^4+x^6+x^8)(x^{12}+x^{15}+x^{18}+x^{21})(x^{35}+x^{40}+x^{45}+x^{50})(x^{70}+x^{80}+...) =$

$$\frac{(x^4+x^6+x^8)(x^{12}+x^{15}+x^{18}+x^{21})(x^{35}+x^{40}+x^{45}+x^{50}).x^{70}}{x-1} =$$

$$\frac{x^{121}(1+x^2+x^4)(1+x^3+x^6+x^9)(1+x^5+x^{10}+x^{15})}{x-1}$$

30) Detérminese la función generatriz para el número de maneras de tener la cantidad n, con $0 \leq n \leq 99$, en monedas de uno, de cinco, de diez, de veinticinco y de cincuenta.

SOLUCIÓN:

Es el número de soluciones enteras de la ecuación

$x + 5y + 10z + 25t + 50w = n$ con x, y, z, t y w enteros no negativos.

Equivale a la partición de n utilizando 1, 5, 10, 25 y 50

Es decir que la solución sería el coeficiente de x^n de la función generatriz

$(1+x+x^2+x^3+\ldots)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\ldots)(1+x^{10}+x^{20}+\ldots)(1+x^{25}+x^{50}+\ldots)(1+x^{50}+x^{100}+\ldots)$ (1)

es decir $$\frac{1}{(1-x)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{25})(1-x^{50})} \quad (2)$$

aunque obviamente también podríamos limitar (1) a:

$(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{99})(1+x^5+x^{10}+\ldots+x^{95})(1+x^{10}+x^{20}+\ldots+x^{90})(1+x^{25}+x^{50}+x^{75})(1+x^{50})$

31) Encuentra la función generatriz exponencial de las siguientes sucesiones, siendo a número real:
a) 1, – 1, 1, – 1, 1, – 1, … b) 1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, … c) 1, –a, a^2, – a^3, a^4, …
d) 1, a^2, a^4,a^6… e) a, a^3, a^5, a^7, … f) 0, 1, 2(2), 3(2^2), 4(2^3), …

SOLUCIÓN:

Partiendo de que la función generatriz exponencial de la sucesión 1,1,1,1... es e^x

a) La función es e^{-x}

Ya que, puesto que la derivada n-ésima de e^{-x} es $(-1)^n e^{-x}$ y al ser sustituida en 0 nos da $(-1)^n$, el desarrollo de e^{-x} de McLaurin, es:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!}x^i \text{, cuyos coeficientes de } \frac{x^i}{i} \text{ son } 1, -1, 1, -1 \ldots$$

b) La solución es e^{2x}

la derivada n-ésima de e^{2x} es $2^n.e^{2x}$ y al ser sustituida en 0 nos da 2^n. El desarrollo de McLaurin de e^{2x} es:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2^i}{i!}x^i \text{ cuyos coeficientes de } \frac{x^i}{i} \text{ son } 1, 2, 2^2, 2^3 \ldots$$

c) Combinando a) con b) la solución es e^{-ax}

d) e^{a^2x}

e) ae^{a^2x}

f) xe^{2x}

Los tres últimos casos siguen un razonamiento completamente análogo a los anteriores.

32.) Determina la sucesión generada por cada una de las siguientes funciones generatrices exponenciales:

a) $3e^{3x}$ b) $6e^{5x} – 3e^{2x}$ c) $e^x + x^2$ d) $e^{2x} – 3x^3 + 5x^2 + 7x$ e) $1/(1-x)$

f) $3/(1 – 2x) + e^x$

SOLUCIÓN

a) La derivada n-ésima de la función es $3^{n+1}e^{3x}$

Si hacemos el desarrollo de McLaurin, obtenemos :

$3e^{3x} = 3+3^2x+\frac{3^3}{2!}x^2+\frac{3^4}{3!}x^3+\ldots$, la sucesión generada es 3, 3^2, 3^3, 3^4, ...

b) La derivada n-ésima de la función es $6.5^ne^{5x} – 3\cdot2^ne^{2x}$ que al ser sustituidas en 0 se obtiene la sucesión $6.5^n – 3.2^n$

c) Las derivadas sucesivas son $e^x + 2x$, $e^x + 2$, e^x , e^x , ... que generan la sucesión

1, 1, 3, 1, 1, 1,.....

También sin recurrir a las derivadas, podemos pensarlo así:

$e^x + x^2 = (1+x+(x^2/2!)+(x^3/3!)+ (x^4/4!)+...) + x^2 = (1+x+[(1/2!)+1]x^2+(x^3/3!)+ (x^4/4!)= 1+x+(3/2!)x^2+(x^3/3!)+ (x^4/4!)$ que genera la sucesión 1,1,3,1,1,1...

d) Las derivadas sucesivas son $2e^{2x} – 9x^2 + 10x +7$, $4e^{2x} – 18x + 10$, $8e^{2x} -18$, y a partir de aquí serían 2^ne^{2x} para $n\geq4$, obteniéndose la sucesión:

1, 9, 14, -10, 16, 32, 64,....

e) Las derivadas sucesivas de $(1-x)^{-1}$ son

$f'(x) = (1-x)^{-2}$, $f''(x) = 2(1-x)^{-3}$, $f'''(x) = 6(1-x)^{-4}$, ... $f^{n)}(x) = n!(1-x)^{-n-1}$

La sucesión generada es 1,1,2,6,24,... es decir n!

f) $3/(1-2x) + e^x$ Derivadas sucesivas de $3.(1-2x)^{-1} + e^x$ son

$6(1-2x)^{-2} + e^x$, $24(1-2x)^{-3} + e^x$, $144(1-2x)^{-3} + e^x$

4, 7, 25, 145, ... $3\ 2^n n! + 1$

Sin recurrir a las derivadas podemos razonarlo así:

$3/(1-2x) + e^x = 3(1+2x+2^2x^2+2^3x^3+2^4x^4+...) + (1+x+(x^2/2!)+(x^3/3!)+ (x^4/4!)+...)= (3+3.2x+((2!.3.2^2)/2!)x^2+((3!3.2^3)/3!)x^3+((4!.3.2^4)/4!)x^4+...) + (1+x+(x^2/2!)+(x^3/3!)+ (x^4/4!)+...)$ y sumando los coeficientes de igual grado se obtiene una sucesión del tipo

$a_0+a_1x+(a_2/2!)x^2+(a_3/3!)x^3+...$ donde los a_n son $3\ 2^n n! + 1$

33) a) Dada la función generatriz $2e^{2x}$ ¿cuál es la sucesión que determina, si se considera que dicha función es ordinaria?

b) Dar un fórmula explícita para la función generatriz exponencial de la sucesión $a_n = 1/(n+1)$.

(Ejercicio propuesto en el examen de Febrero de 2009 en La Coruña)

SOLUCIÓN:

a) la derivada n-ésima de $2e^{2x}$ es $2^{n+1}.e^{2x}$ y al ser sustituida en 0 nos da 2^{n+1}. El desarrollo de McLaurin de e^{2x} es:

$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2^{i+1}}{i!}x^i$ cuyos coeficientes de x^n son $\frac{2^{n+1}}{n!}$, por tanto la sucesión pedida, al considerar la función generatriz ordinaria, es $a_n=\frac{2^{n+1}}{n!}$

b) $f(x) = 1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3.2!}x^2+\frac{1}{4.3!}x^3+\ldots = 1+\frac{1}{2!}x+\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{4!}x^3$

$xf(x) = x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\ldots = e^x-1$, de donde $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$

34) . Encuentra la función generatriz exponencial del número de formas en que se pueden ordenar n letras, n ≥ 0, seleccionadas de cada una de las siguientes palabras: a) HAWAII b) MISSISSIPPI c) ISOMORPHISM

SOLUCIÓN:

a) Coeficiente de $x^6/6!$ de $(1+x)^2(1+x+(x^2/2!))^2$, puesto que la H y la W aparecen 1 vez (1+x), mientras que la A y la I lo hacen 2 veces $1+x+(x^2/2!)$

b) Coeficiente de $x^{11}/11!$ de $(1+x)\,(1+x+(x^2/2!))\,(1+x+(x^2/2!)+(x^3/3!)+(x^4/4!))^2$, puesto que hay una sola letra que aparece una vez que es la M, una letra que se repite 2 veces (P) y la M y la I que lo hacen 4 veces.

c) Coeficiente de $x^{11}/11!$ de $(1+x)^3(1+x+(x^2/2!))^4$, puesto que hay tres letras que solo aparecen una vez (R, P, H) y 4 que se repiten dos veces (I, S, O, M)

35.) Para el apartado (b) del ejercicio 20, ¿cuál es la función generatriz exponencial si la disposición debe contener al menos dos letras I?

SOLUCIÓN:

En este caso el factor correspondiente a la I, que es uno de los $1+x+(x^2/2!)+(x^3/3!)+(x^4/4!)$, quedaría así: $(x^2/2!)+(x^3/3!)+(x^4/4!)$, es decir que finalmente la función generatriz correspondiente sería:

$(1+x).\ (1+x+(x^2/2!)).\ ((x^2/2!)+(x^3/3!)+(x^4/4!)).\ (1+x+(x^2/2!)+(x^3/3!)+(x^4/4!))$

Siendo cada factor correspondiente a las letras M , P, I, S, respectivamente.

36) Se genera una sucesión ternaria (0, 1, 2) de 20 dígitos de forma aleatoria, ¿cuál es la probabilidad de que (a) tenga un número par de unos? (b) tenga un número par de unos y un número par de doses? (c) tenga un número impar de ceros? (d) el total de ceros y unos sea impar? (e) el número total de ceros y unos sea par?

<u>SOLUCIÓN:</u>

Los casos posibles son $RV_{3,20} = 3^{20}$

a) Casos favorables: Coeficiente de $x^{20}/20!$ en el desarrollo de $(1+x+(x^2/2!)+...)^2.(1+(x^2/2!)+(x^4/4!)+...)$, pues $(1+x+(x^2/2!)+...)$ es para la elección del 0 y el 2, mientras que al obligarnos a que tenga exactamente un número par de unos, la elección del 1, sería $1+(x^2/2!)+(x^4/4!)+...$

Puedo tratar de averiguarlo así:

Dado que $1+x+(x^2/2!)+... = e^x$, entonces $(1+x+(x^2/2!)+...)^2 = e^{2x}$,

y $1+(x^2/2!)+(x^4/4!)+...=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Con lo cual nuestra función generatriz exponencial es $\dfrac{e^{3x}+e^x}{2}$, cuya derivada enésima es $\dfrac{3^n e^{3x}+e^x}{2}$, que al sustituir en 0 (para el desarrollo de Mclaurin) nos da $\dfrac{3^n+1}{2}$

por tanto el desarrollo de McLaurin de nuestra función es:

$\sum_{i=0}^{\infty}\dfrac{3^i+1}{2.i!}.x^i$, siendo el coeficiente de $x^{20}/20!$ igual a $\dfrac{3^{20}+1}{2}$ que es la solución de los casos favorables a nuestro problema.

Por tanto la probabilidad pedida es $\dfrac{3^{20}+1}{2.3^{20}}$

d) Que tenga un número par de unos y un número par de doses:

$(1+x+(x^2/2!)+...)$ elección para el 0

$1+(x^2/2!)+(x^4/4!)+...$ elección para el 1 y el 2

El resultado de los casos favorables es el coeficiente de $x^{20}/20!$ de la función generatriz

$$(1+x+(x^2/2!)+...)\ (1+(x^2/2!)+(x^4/4!)+...)^2 = e^x.\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{3x}+e^{-x}+2e^x}{4},$$

cuya derivada enésima es $\dfrac{3^n e^{3x}+(-1)^n e^{-x}+2e^x}{4}$, que al ser sustituida en x=0, nos da $\dfrac{3^n+(-1)^n+2}{4}$, obteniéndose el desarrollo de Maclaurin siguiente:

$\sum_{i=0}^{\infty}\dfrac{3^i+(-1)^i+2}{4.i!}x^i$, cuyo coeficiente de de $x^{20}/20!$ es $\dfrac{3^{20}+3}{4}$

Por tanto, la probabilidad pedida es $\dfrac{3^{20}+3}{4.3^{20}}$

e) Que tenga un número impar de ceros

$(x+(x^3/3!)+(x^5/5!)+...)$ elección para el 0
$(1+x+(x^2/2!)+...)$ elección para el 1 y el 2.

Los casos favorables vienen determinados por el coeficiente de $x^{20}/20!$ de la función generatriz:

$(1+x+(x^2/2!)+...)^2(x+(x^3/3!)+(x^5/5!)+...) = e^{2x}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2} = \dfrac{e^{3x}-e^x}{2}$, cuya derivada enésima es $\dfrac{3^n e^{3x}-e^x}{2}$, que sustituyendo en 0 da: $\dfrac{3^n-1}{2}$, siendo el desarrollo de MacLaurin de nuestra función:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{3^i-1}{i!.2}x^i \text{ cuyo coeficiente de } x^{20}/20! \text{ es } \frac{3^{20}-1}{2}.$$

La probabilidad pedida es $\dfrac{3^{20}-1}{2.3^{20}}$

d) El total de ceros y unos sea impar

Para que una suma sea impar, necesariamente ha de ser impar uno de los sumandos y el otro par, por tanto tenemos dos situaciones: Que el total de ceros sea par y unos sea impar y viceversa. En cualquier caso las funciones generatrices de ambas situaciones son idénticas, por lo que basta con calcular un caso y multiplicarlo por dos.

Para el caso en que la cantidad de ceros sea par y unos impar, los casos favorables vendrían dados por el coeficiente de $x^{20}/20!$ del desarrollo de

$(1+x+(x^2/2!)+...).\ (x+(x^3/3!)+(x^5/5!)+...).\ (1+(x^2/2!)+(x^4/4!)+...)$ cuyos factores representan respectivamente la elección del 2, la elección del 1 y la elección del 0. Pasando a sus expresiones exponenciales tendríamos:

$e^x\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} = \dfrac{e^{3x}-e^{-x}}{4}$, cuya derivada enésima es $\dfrac{3^n e^{3x}-(-1)^n e^x}{4}$, que sustituyendo en 0 da: $\dfrac{3^n-(-1)^n}{4}$, siendo el desarrollo de MacLaurin de nuestra función:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{3^i-(-1)^i}{i!.4}x^i \text{ cuyo coeficiente de } x^{20}/20! \text{ es } \frac{3^{20}-1}{4}.$$

Recordemos que tenemos que multiplicar por 2 ya que sería igual número de casos para que la cantidad total de ceros sea impar y unos par.

La probabilidad pedida es $2.\dfrac{3^{20}-1}{4.3^{20}} = \dfrac{3^{20}-1}{2.3^{20}}$

f) Que el total de ceros y unos sea par

Dos casos: que ambos sean pares o ambos impares.

En el caso de que ambos sean pares tenemos la función generatriz e idéntica solución que en el apartado b), es decir

$$\frac{3^{20}+3}{4}$$

Y en el caso de que ambos sean impares tenemos la función generatriz siguiente:

$(1+x+(x^2/2!)+...).\ (x+(x^3/3!)+(x^5/5!)+...)^2 = e^x.\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{3x}+e^{-x}-2e^x}{4}$ cuya derivada enésima es $\frac{3^n e^{3x}+(-1)^n e^{-x}-2e^x}{4}$, que al ser sustituida en x=0, nos da $\frac{3^n+(-1)^n-2}{4}$, obteniéndose el desarrollo de Maclaurin siguiente:

$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{3^i+(-1)^i-2}{4.i!}x^i$, cuyo coeficiente de de $x^{20}/20!$ es $\frac{3^{20}-1}{4}$

Entonces los casos favorables a nuestro apartado son:

$\frac{3^{20}+3}{4}+\frac{3^{20}-1}{4}=\frac{2.3^{20}+2}{4}=\frac{3^{20}+1}{2}$, así pues la probabilidad pedida es $\frac{3^{20}+1}{2.3^{20}}$

37.) Comprueba que $\sum_{k=0}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

SOLUCIÓN:

Método 1 (por el operador sumatoria. Ver teoría en el Grimaldi, pág 284)

Sabemos que 1/(1-x) es la función generatriz correspondiente a $1+x+x^2+\ ...$
y x/(1-x) es la que corresponde a $x+x^2+x^3+...$

derivando tenemos $1/(1-x)^2$ corresponde a $1+2x+3x^2$ sucesión 1,2,3....
por tanto $x/(1-x)^2$ lo hace a $x+2x^2+3x^3+...$ sucesión 0,1,2,3,...
volviendo a derivar,
$(x+1)/(1-x)^3$ corresponde a $1+4x+9x^2+...$ es la función generatriz de la sucesión $1,2^2,3^2,...$
y $x(x+1)/(1-x)^3$ es la función generatriz de la sucesión $0, 1, 2^2, 3^2,...$ $(x+4x^2+9x^3+...)$
volviendo a derivar
$(x^2+4x+1)/(1-x)^4$ corresponde a $1+8x+27x^2+...$
$x(x^2+4x+1)/(1-x)^4$ corresponde a la función generatriz de $0, 1^3, 2^3, 3^3$

Entonces el resultado de $0+1^3+2^3+3^3+...+n^3$ es el coeficiente de x^n de la función (Se explica perfectamente en la página 284 del Grimaldi)

$\frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}\frac{1}{1-x}$ que equivale al coeficiente de x^{n-1} de la función $\frac{x^2+4x+1}{(1-x)^5}$

Grado x^2+4x+1	Coeficiente	Grado $(1-x)^{-5}$	Coeficiente
2	1	n-3	$\binom{n+1}{n-3}$
1	4	n-2	$\binom{n+2}{n-2}$
0	1	n-1	$\binom{n+3}{n-1}$

La solución es $\binom{n+1}{n-3}+4\binom{n+2}{n-2}+\binom{n+3}{n-1}=$

$$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4!}+4\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{4!}+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4!}=$$

$$\frac{(n+1)n[(n-1)(n-2)+4(n+2)(n-1)+(n+3)(n+2)]}{4!}=\frac{(n+1)n(6n^2+6n)}{24}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=$$

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

como queríamos demostrar.

Método 2 (por inducción. Este método no forma parte del temario de discreta)
Lo compruebo para n=1.
En efecto $0+1^3 = (1.2/2)^2$
Lo supongo cierto para n y lo demuestro para n+1

Tengo que demostrar que $\sum_{k=0}^{n+1}k^3=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$

Partimos de que

$$\sum_{k=0}^{n+1}k^3=(n+1)^3+\sum_{k=0}^{n}k^3=(n+1)^3+\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=\frac{4(n+1)^3+n^2(n+1)^2}{4}=\frac{(n+1)^2(4(n+1)+n^2)}{4}=$$

$$\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$ como queríamos demostrar.

38. a) Calcula la función generatriz de la sucesión de productos 0 · (– 1), 1 · 0, 2 · 1, 3 · 2, 4 · 3, …, i · (i – 1), …

b) Utilizando el resultado anterior halla una fórmula para $\sum_{i=0}^{n}i(i-1)$

SOLUCIÓN:

a) Partimos de la siguiente función

$x^0+x^1+x^2+x^3+....$, es decir $1/(1-x)$
Derivamos y obtenemos $0.x^{-1}+1.x^0+2.x^1+3.x^2+...$, es decir $1/(1-x)^2$
Derivamos otra vez y... $0.(-1)x^{-2}+1.0x^{-1}+2.1x^0+3.2x^1+...$, es decir $2/(1-x)^3$
Multiplico por x^2 y obtengo $0.(-1) +1.0x+2.1x^2+3.2x^3+...$,
Por tanto la función generatriz de la sucesión $0 \cdot (-1), 1 \cdot 0, 2 \cdot 1, 3 \cdot 2, 4 \cdot 3, \ldots, i \cdot (i - 1), \ldots$ es $2x^2/(1-x)^3$

b) Utilizando el operador sumatoria

$\sum_{i=0}^{n} i(i-1)$ viene determinado por el coeficiente de grado n en la función generatriz $2x^2/(1-x)^4$ que equivale al coeficiente de grado n-2 de $2(1-x)^{-4}$

que es $2\binom{n+1}{n-2} = \frac{2(n+1)n(n-1)}{6} = \frac{n(n^2-1)}{3}$

39. Calcula la sucesión generada por la función g(x) = x f(x)/(1 – x) siendo f(x) la función generatriz de la sucesión {a_i}

SOLUCIÓN:

Si f(x) es $a_0+a_1x+a_2x^2+...$ Sabemos que $f(x)/(1-x)$ es la generatriz de la sucesión de sumas parciales, es decir

$a_0 + (a_0+a_1)x + (a_0+a_1+a_2)x^2+...$

Por tanto $xf(x)/(1-x)$ obtiene $a_0x + (a_0+a_1)x^2 + (a_0+a_1+a_2)x^3+...$

La sucesión generada es 0, a_0, a_0+a_1, $a_0+a_1+a_2$, ...

EJERCICIOS DIVERSOS (Grimaldi, pág. 287)

40. Hallase la función generatriz de las siguientes sucesiones:
a) 7, 8, 9, 10... b) 1,a,a^2,a^3, ... c) 1, 1+a, $(1+a)^2$, $(1+a)^3$,... d) 2, 1+a, 1+a^2, 1+a^3,...

SOLUCIÓN:

a) $f(x) = 7+8x+9x^2+10x^3+ ...$

$-1/(1-x)^2 = -1-2x-3x^2-4x^3 - ...$

Sumando ambas expresiones obtenemos $6(1+x+x^2+x^3+...) = 6/(1-x)$
De donde $f(x) = \frac{6}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}$

b) $f(x) = 1+ax +a^2x^2 +a^3x^3+...$
$-axf(x) = -ax - a^2x^2 - a^3x^3 -...$

Sumando $(1-ax) f(x) = 1$, de donde $f(x) = 1/(1-ax)$

c) Obviamente es el caso b para a=1+a, es decir

$$\frac{1}{1-(1+a)x}$$

d) $f(x) = 2+(1+a)x+(1+a^2)x^2+ \ldots = (1+x+x^2+\ldots)+(1+ax+a^2x^2+\ldots)$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-ax}$$

41) Sea $C = \{a,b,c,d,e,f,g\}$
a) Hállese la función generatriz para los subconjuntos de C. ¿Cuántos sumandos hay en los coeficientes x^2 de esta función?
b) Hállese la función generatriz para la forma de seleccionar n objetos de C con 0≤n≤14, de C, donde cada objeto puede seleccionarse a lo sumo dos veces. ¿Cuántos sumandos hay en el coeficiente x^2 de esta función?

SOLUCIÓN:
a) La forma de elección de cada objeto es 1+x (no lo tomo o lo tomo en el subconjunto). Como son 7 objetos, la función generatriz es $(1+x)^7$ y el coeficiente de x^2 es $\binom{7}{2} = 21$
b) La selección de cada objeto es ahora $1+x+x^2$
La función generatriz es $(1+x+x^2)^{14}$. La solución sería el coeficiente de x^n
El coeficiente de x^2 :

Vamos a ver la función asociada a $1+x+x^2$

Sabemos que $1/(1-x) = 1+x+x^2+\ldots$
$-x^3/(1-x) = -x^3-x^4 -\ldots$

Sumando ambas funciones resulta que $1+x+x^2 = (1-x^3)/(1-x)$

Por tanto la solución buscada es el coeficiente de x^2 en $(1-x^3)^{14}(1-x)^{-14}$
que es $\binom{-14}{2} = \binom{15}{2} = 105$

42.) Hállese el coeficiente de x^{83} en $f(x) = (x^5 + x^8 + x^{11} + x^{14} + x^{17})^{10}$

$x^5 + x^8 + x^{11} + x^{14} + x^{17} = x^5(1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12})$
Por otra parte si $g(x) = 1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + \ldots$
Multiplicando por $-x^3$ se obtiene que $-x^3g(x) = -x^3 -x^6 - \ldots$ Sumando ambos tenemos que $g(x) = 1/(1-x^3)$. Si multiplico por $-x^{15}$ obtengo $-x^{15} -x^{18} - x^{21}- \ldots$ por tanto tenemos que $1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} = (1-x^{15})/(1-x^3)$
La solución que busco es el coeficiente de grado 33 en $(1-x^{15})^{10}.(1-x^3)^{-10}$

Grado $(1-x^{15})^{10}$	Coeficiente	Grado $.(1-x^3)^{-10}$	Coeficiente
0	1	33	$-\binom{-10}{11}=\binom{20}{11}$
15	$-\binom{10}{1}$=-10	18	$\binom{-10}{6}=\binom{15}{6}$
30	$\binom{10}{2}=45$	3	$-\binom{-10}{1}=\binom{10}{1}=10$

Solución $\binom{20}{11}-10\binom{15}{6}+450$

43. El sargento Balín debe distribuir 40 balas (20 para rifle y 20 para pistola) entre cuatro policías, de modo que cada uno obtenga al menos dos balas, pero no más de siete de cada tipo. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

<u>SOLUCIÓN:</u>
Reparto primero las balas de rifle

El número de repartos posibles viene determinado por el coeficiente de grado x^{20} en $(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7)^4$.

$x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 = x^2(1+x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$

Y se demuestra fácilmente (está hecho en ejercicios anteriores) que
$1+x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = (1-x^6)./(1-x)$
Por tanto la solución viene a ser el coeficiente de grado x^{20} en la expresión:

$$x^8(1-x^6)^4(1-x)^{-4}$$

que equivale al coeficiente de grado x^{12} en $(1-x^6)^4(1-x)^{-4}$

Grado $(1-x^6)^4$	Coeficiente	Grado $.(1-x)^{-4}$	Coeficiente
0	1	12	$\binom{15}{12}$
6	$-\binom{4}{1}$=-4	6	$\binom{9}{6}$
12	$\binom{4}{2}=6$	0	1

El reparto de balas de pistola sigue idéntico proceso. Por tanto la solución final es

$$\left[\binom{15}{12}-4\binom{9}{6}+6\right]^2$$

44. ¿Cuántos números telefónicos de 10 dígitos presentan sólo los digitos 1,3,5,7 si cada digito aparece al menos dos veces o no aparece?

SOLUCIÓN:
Importa el orden. Tengo que recurrir a las funciones generatrices exponenciales

La solución es el coeficiente de $x^{10}/10!$ en $(1+x^2/2!+x^3/3!+ ...)^4$
Sabemos que $e^x = 1+x+x^2/2!+x^3/3!+ ...$ por tanto la función que buscamos es $e^x - x$

Debemos buscar el coeficiente de $x^{10}/10!$ en $(e^x - x)^4$

$$(e^x - x)^4 = \binom{4}{0}e^{4x} - \binom{4}{1}x.e^{3x} + \binom{4}{2}x^2e^{2x} - \binom{4}{3}x^3e^x + \binom{4}{4}x^4$$

El coeficiente de $x^{10}/10!$ en e^{4x} es $\mathbf{4^{10}}$, ya que e^{4x} es la función generatriz exponencial de $1, 4, 4^2, ...$
Para hallar el coeficiente de $x^{10}/10!$ para $x.e^{3x}$, tenemos que su derivada i-ésima es:
$3^{i-1}e^{3x}(i+3x)$ que al sustituir en 0 y el subíndice i por 10, da $\mathbf{3^9.10}$

Para hallar el coeficiente de $x^{10}/10!$ para **$x^2.e^{2x}$, observemos que es 10.9 por el coeficiente de $x^8/8!$ de e^{2x} que es 2^8**. Así el coeficiente pedido es $10.9.2^8$

Para hallar el coeficiente de $x^{10}/10!$ para $x^3.e^x$, observemos que es 10.9.8 por el coeficiente de $x^7/7!$ de e^x que es 1. Así el coeficiente pedido es 10.9.8

La solución es $\binom{4}{0}4^{10} - \binom{4}{1}10.3^9 + \binom{4}{2}10.9.2^8 - \binom{4}{3}10.9.8$

Lo consignado en rojo es una propiedad importante que permite descomponer los dos factores a la hora de calcular el coeficiente.

45.) Utilícense los cinco primero términos del desarrollo binomial de $(1+x)^{1/3}$ para aproximar la raiz cúbica de 2.

SOLUCIÓN:

El desarrollo de $(1+x)^{1/3}$
Si hacemos las 4 primeras derivadas y sustituimos la x por 0 obtenemos los coeficientes de grado 1, 2, 3 y 4, que son respectivamente 1/3, -2/9, 10/27, -80/81

Así pues $(1+x)^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9.2!}x^2 + \frac{10}{27.3!}x^3 - \frac{80}{81.4!}x^4$. Sustituyendo x por 1, obtenemos $\sqrt[3]{2} \approx 1,24279$

46.) a) ¿Para que sucesión de números es $g(x) = (1-2x)^{-5/2}$ la función generatriz exponencial?
b) Hállense a y b de modo que $(1-ax)^b$ sea la función generatriz exponencial para la sucesión 1, 7, 7.11, 11.15, ...

<u>SOLUCIÓN:</u>

a) Si derivo sucesivas veces g(x), y sustituyo x por 0 obtengo la sucesión

1, 5, 7.5, 9.7.5, 11.9.7.5

b) derivando se tiene que la derivada i-ésima es

$$(-1)^i a^i b(b-1)(b-2)...(b-i+1)(1-ax)^{b-i}$$

que al sustituir por x= 0 obtenemos

$$(-1)^i a^i b(b-1)(b-2)...(b-i+1)$$

Entonces obtenemos las siguientes ecuaciones:

(1): 7 = -ab
(2): 7.11 = $a^2b(b-1)$
(3): 7.11.15 = $-a^3b(b-1)(b-2)$

Dividiendo (2) entre (1) se obtiene (4): 11 = a(1-b)
Dividiendo (3) entre (2) se obtiene (5): 15= a(2-b)
Se divide (4) entre (5) y se obtiene b= -7/4 y a=4

47.) En un área rural hay 12 buzones colocados en una tienda.
a) Si un repartidor de propaganda tiene 20 folletos idénticos, ¿de cuántas formas los pude distribuir, de modo que en cada buzón haya al menos un folleto?
b) Si los buzones están en dos filas de seis, ¿cuál es la probabilidad de que una distribución del apartado a) tenga 10 folletos distribuidos en los seis buzones superiores y otros 10 en los inferiores?

<u>SOLUCIÓN:</u>

a) Es el coeficiente de x^{20} en $(x+x^2+...)^{12} = x^{12}/(1-x)^{12}$; coeficiente de grado 8 de $(1-x)^{-12}$

$$\binom{19}{8}$$

b) Las formas que se pueden distribuir 10 folletos en 6 buzones, teniendo que haber al menos un folleto en cada buzón, que es el coeficiente de x^{10} en $(x+x^2+...)^6 = x^6.(1-x)^{-6}$; coeficiente de x^4 de $(1-x)^{-6}$

Es decir, $\binom{9}{4}$. Como son dos filas idénticas, sería $\binom{9}{4}^2$.La probabilidad es entonces $\binom{9}{4}^2 : \binom{19}{8}$

CAPITULO III

SUCESIONES RECURRENTES

1) Encuentra la solución general para cada una de las siguientes progresiones geométricas:
a) $a_{n+1} – 1,5\ a_n = 0,\ n \geq 0$; b) $4\ a_n – 5\ a_{n-1} = 0,\ n \geq 1$;
c) $3\ a_{n+1} – 4\ a_n = 0,\ n \geq 0,\ a_1 = 5$; d) $2\ a_n – 3\ a_{n-1} = 0,\ n \geq 1,\ a_4 = 81$;

SOLUCIÓN:

a) Se trata de una progresión geométrica de razón 1,5. Por tanto la solución general es $a_n = a_0(1,5)^n$
b) Se trata de una progresión geométrica de razón 5/4. Por tanto la solución general es $a_n = a_1(5/4)^{n-1}$
c) Se trata de una progresión geométrica de razón 4/3. Sabiendo que a_1=5, tenemos que la solución general es $a_n = 5(4/3)^{n-1}$
d) Se trata de una progresión geométrica de razón 3/2. Sabiendo que a_4=81, tenemos que $81=a_1.(3/2)^3$, de donde a_1= 24 la solución general es $a_n = 24(3/2)^{n-1}= 3^n.2^{n-4}$

2.) Si a_n, $n \geq 0$, es una solución de la relación de recurrencia $a_{n+1} – d\ a_n = 0$ y a_3 = 153/49, a_5 = 1377/2401, ¿cuánto vale d?

SOLUCIÓN:

Al tratarse de una progresion geométrica de razón d, tenemos que
$a_5 = a_3.d^2$, es decir que $d^2 = (1377/2401).(49/153) = 9$
$d = \pm 3$

3.) Hace quince años se invirtieron las ganancias de un negocio en una cuenta que pagaba un 8% de interés anual con pagos trimestrales. Si ahora el saldo de la cuenta es de 7.218,27 €, ¿cuál fue la inversión inicial?

SOLUCIÓN:
Método 1: Si a_n es el capital al cabo del trimestre n, resulta que
$a_n = a_{n-1}+ (0,08/4)a_{n-1}$, es decir una relación de recurrencia $a_n – 1,02\ a_{n-1} = 0$ que es una geométrica de razón 1,02 y cuya solución general es $a_n = c(1,02)^n$
Si el saldo de la cuenta al cabo de 15 años (60 trimestres) es 7.218,27 resulta que
a_{60} = 7.218,27, de donde podemos averiguar c, ya que $c = \dfrac{7218,27}{(1,02)^{60}} = 2200$

La inversión incial es $a_0 = 2200$

Método 2:
Para deducir la fórmula que me da el capital, hagamos lo siguiente. Llamemos C_0 al capital inicial y C_i al que tenemos al cabo del trimestre i.
Al cabo del primer trimestre tendremos $C_1=C_0+(0,08/4)C_0 = C_0\ (1+(0'08/4))$
Al cabo del segundo trimestre tendremos $C_2=C_1+(0,08/4)\ C_1=C_0(1+(0'08/4))^2$
Al cabo de los 15 años (60 trimestres) tendremos $C_{60}=C_0(1+(0,08/4))^{60}$

Es una progresión geométrica de razón 1+(0’08/4) =1,02. Aplicando los datos del ejercicio, tenemos:

$7218{,}27 = C_0.\ (1{,}02)^{60}$; de donde $C_0 =$ 2200 €

4. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ una lista de números reales distintos que deben ordenarse mediante el método de la burbuja. (a) ¿Después de cuántas comparaciones estarán ordenados en forma ascendente los diez números más pequeños de la lista? (b) ¿Cuántas comparaciones más se necesitan para terminar la ordenación?

SOLUCIÓN:
Necesito 19 comparaciones para que el menor de todos quede en la primera posición. 18 para el segundo y así sucesivamente hasta el 10º.
El número de comparaciones hasta quedar ordenados los diez números más pequeños de la lista sería: 19+18+17+16+15+14+13+12+11+10 = 145

b) Faltan para completar la ordenación 9+8+7+6+5+4+3+2+1= 45

5.) Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia:
a) $a_n = 5\ a_{n-1} + 6\ a_{n-2}=0,\ \ n \geq 2,\ a_0 = 1,\ a_1 = 3$;
b) $2\ a_{n+2} - 11\ a_{n+1} + 5\ a_n = 0,\ n \geq 0,\ a_0 = 2,\ a_1 = -8$;
c) $3\ a_{n+1} = 2\ a_n + a_{n-1}=0,\ \ n \geq 1,\ a_0 = 7,\ a_1 = 3$;
d) $a_{n+2} + a_n = 0,\ n \geq 0,\ a_0 = 0,\ a_1 = 3$;
e) $a_{n+2} + 4\ a_n = 0,\ n \geq 0,\ a_0 = a_1 = 1$;
f) $a_n - 6\ a_{n-1} + 9\ a_{n-2} = 0,\ n \geq 2,\ a_0 = 5,\ a_1 = 12$;
g) $a_n + 2\ a_{n-1} + 2\ a_{n-2} = 0,\ n \geq 2,\ a_0 = 1,\ a_1 = 3$;

SOLUCIÓN:

a) ***$a_n - 5\ a_{n-1} - 6\ a_{n-2},\ n \geq 2,\ a_0 = 1,\ a_1 = 3$***

Busco una p.g. $a_n = c.r^n$ que verifique la relación de recurrencia, es decir:

$c.r^n - 5.cr^{n-1} - 6.cr^{n-2} = 0$; sacando factor común a cr^{n-2} obtenemos
$c.r^{n-2}(r^2-5r-6) = 0.$
La ecuación característica es $r^2-5r-6 = 0$, cuyas soluciones son 6 y -1

Entonces $a_n=c.6^n$ y $a_n = c.(-1)^n$ son soluciones buscadas, como son linealmente independientes, la solución general es $a_n = c_1.6^n + c_2.\ (-1)^n$. Para hallar c_1 y c_2, hacemos uso de que $a_0 = 1$, $a_1 = 3$.
Si $a_0=1$, tenemos que $1 = c_1 + c_2$
Si $a_1=3$, tenemos que $3 = 6c_1 - 2c$
Resolviendo el sistema, $c_1= 4/7$ y $c_2 = 3/7$.
La solución general es

$$\mathbf{a_n = (4/7)6^n+(3/7)(-1)^n} \text{ con } n\geq 0$$

b) ***$2\ a_{n+2} - 11\ a_{n+1} + 5\ a_n = 0,\ n \geq 0,\ a_0 = 2,\ a_1 = -8$***

Busco una p.g. $a_n = c.r^n$ que verifique la relación de recurrencia, es decir:

$2c.r^{n+2} - 11.cr^{n+1} + 5.cr^n = 0$; sacando factor común a cr^n obtenemos
$c.r^n(2r^2-11r+5) = 0$.
La ecuación característica es $2r^2-11r+5 = 0$, cuyas soluciones son 5 y (1/2)

Entonces $a_n=c.5^n$ y $a_n = c.(1/2)^n$ son soluciones buscadas, como son linealmente independientes, la solución general es $a_n = c_1.5^n + c_2.(1/2)^n$. Para hallar c_1 y c_2, hacemos uso de que $a_0 = 2$, $a_1 = -8$.

Como $a_0=2$, tenemos que $2 = c_1 + c_2$
Si $a_1=-8$, tenemos que $-8 = 5c_1 +(1/2)c_2$

Resolviendo el sistema, $c_1= -2$ y $c_2 = 4$.
La solución general es

$\mathbf{a_n = -2.5^n+4(1/2)^n}$ con $n\geq 0$

c) ***$3 a_{n+1} = 2 a_n + a_{n-1} =0, n \geq 1, a_0 = 7, a_1 = 3$***

$3 a_{n+1} - 2 a_n - a_{n-1} = 0$. Sucesión recurrente lineal homogénea de orden 2.

Procediendo de forma análoga a los casos anteriores, la ecuación característica es
$3r^2 - 2r - 1 = 0$
cuyas soluciones son 1 y -1/3
Entonces $a_n=c$. y $a_n = c.(-1/3)^n$ son soluciones buscadas, como son linealmente independientes, la solución general es $a_n = c_1 + c_2.(-1/3)^n$. Para hallar c_1 y c_2, hacemos uso de que $a_0 = 7$, $a_1 = 3$.

Como $a_0=7$, tenemos que $7 = c_1 + c_2$
Si $a_1=3$, tenemos que $3 = c_1 +(-1/3)c_2$

Resolviendo el sistema, $c_1= 4$ y $c_2 = 3$.
La solución general es

$\mathbf{a_n = 4+3(-1/3)^n}$ con $n\geq 0$

d) ***$a_{n+2} + a_n = 0, n \geq 0, a_0 = 0, a_1 = 3$***

$a_{n+2} + a_n = 0$. Es lineal y homogénea de grado 2 ya que podemos considerarla así:
$a_{n+2} + a_n + 0.a_{n-1} = 0$. Entonces la ecuación característica es $r^2+1=0$, cuyas soluciones son i, -i.

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2} \;;\; -i = \cos\frac{-\pi}{2} + isen\frac{-\pi}{2}$$

La solución general será $a_n = c_1.i^n + c_2.(-i)^n$. Por el Teorema de Moivre

$$a_n = c_1(\cos\frac{n\pi}{2} + i.sen\frac{n\pi}{2}) + c_2(\cos\frac{-n\pi}{2} + i.sen\frac{-n\pi}{2})$$

Teniendo en cuenta que cos(-a)=cos(a) y que sen (-a)=-sen(a), tenemos

$$a_n = c_1(\cos\frac{n\pi}{2} + i.sen\frac{n\pi}{2}) + c_2(\cos\frac{n\pi}{2} - i.sen\frac{n\pi}{2})$$

Si llamamos $k_1 = c_1 + c_2$ y $k_2 = (c_1 - c_2).i$

$$a_n = k_1.\cos\frac{n\pi}{2} + k_2.sen\frac{n\pi}{2}$$

Como $a_0=0$, tenemos que $0 = k_1$
Como $a_1=3$, tenemos que $3 = k_2$

La solución general es

$a_n = 3sen(n\pi/2)$ con $n \geq 0$

e) ***$a_{n+2} + 4\, a_n = 0,\ n \geq 0,\ a_0 = a_1 = 1$***

$a_{n+2} + 4\, a_n = 0$. Ecuación característica es $r^2 + 4 = 0$, con soluciones complejas $\pm\, 2i$

$$2i = 2(\cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}) \qquad -2i = 2(\cos\frac{-\pi}{2} + isen\frac{-\pi}{2})$$

La solución general será $a_n = c_1.(2i)^n + c_2.(-2i)^n$. Por el Teorema de Moivre

$$a_n = 2^n[c_1(\cos\frac{n\pi}{2} + i.sen\frac{n\pi}{2}) + c_2(\cos\frac{-n\pi}{2} + i.sen\frac{-n\pi}{2})]$$

Teniendo en cuenta que cos(-a)=cos(a) y que sen (-a)=-sen(a), tenemos

$$a_n = 2^n[c_1(\cos\frac{n\pi}{2} + i.sen\frac{n\pi}{2}) + c_2(\cos\frac{n\pi}{2} - i.sen\frac{n\pi}{2})]$$

Si llamamos $k_1 = c_1 + c_2$ y $k_2 = (c_1 - c_2).i$

$$a_n = 2^n(k_1.\cos\frac{n\pi}{2} + k_2.sen\frac{n\pi}{2})$$

Como $a_0=1$, tenemos que $1 = k_1$

Como $a_1=1$, tenemos que $1 = 2.k_2$; $k_2 = 1/2$

La solución general es

$a_n = 2^n\,(\cos(n\pi/2)+(1/2)sen(n\pi/2))$ con $n \geq 0$

f) ***$a_n - 6\, a_{n-1} + 9\, a_{n-2} = 0,\ n \geq 2,\ a_0 = 5,\ a_1 = 12$***

La ecuación característica es $r^2 - 6r + 9 = 0$, cuyas solución es 3 (solución doble)

En este caso se toma como solución general $a_n = c_1(3)^n + c_2.n\,(3)^n$

$5 = c_1$ y $12 = 5.3 + 3c_2$, de donde $c_2 = -1$

La solución general es

$a_n = (5 - n)3^n$ con $n \geq 0$

g) ***$a_n + 2\, a_{n-1} + 2\, a_{n-2} = 0,\ n \geq 2,\ a_0 = 1,\ a_1 = 3$***

Ecuación característica $r^2 + 2r + 2 = 0$; soluciones complejas -1-i, -1+i

$$-1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + isen\frac{3\pi}{4}) \ ; \ -1-i = \sqrt{2}(\cos\frac{-3\pi}{4} + isen\frac{-3\pi}{4})$$

La solución general será $a_n = c_1.(-1+i)^n + c_2.(-1-i)^n$. Por el Teorema de Moivre

$$a_n = (\sqrt{2})^n[c_1(\cos\frac{n3\pi}{3} + i.sen\frac{n3\pi}{4}) + c_2(\cos\frac{-n3\pi}{4} + i.sen\frac{-n3\pi}{4})]$$

Teniendo en cuenta que cos(-a)=cos(a) y que sen (-a)=-sen(a), tenemos

$$a_n = (\sqrt{2})^n [c_1(\cos\frac{n3\pi}{4} + i.sen\frac{n3\pi}{4}) + c_2(\cos\frac{n3\pi}{4} - i.sen\frac{n3\pi}{4})]$$

Si llamamos $k_1 = c_1 + c_2$ y $k_2 = (c_1 - c_2).i$

$$a_n = (\sqrt{2})^n [k_1.\cos\frac{n3\pi}{4} + k_2.sen\frac{n3\pi}{4}]$$

Como $a_0=1$, tenemos que $1 = k_1$

Como $a_1=3$, tenemos que $3 = (\sqrt{2})\ (\frac{-\sqrt{2}}{2} + k_2\frac{\sqrt{2}}{2})$; $k_2 = 4$

La solución general es

$$a_n = (\sqrt{2})^n (\cos\frac{n3\pi}{4} + 4.sen\frac{n3\pi}{4}) \quad \text{con } n\geq 0$$

6.) Si $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ y $a_3 = 37$ satisfacen la relación de recurrencia $a_{n+2} + b\ a_{n+1} + c\ a_n = 0$, donde $n \geq 0$ y b, c son constantes, encuentra a_n.

SOLUCIÓN:

Según la recurrencia tenemos que $a_2 + b.\ a_1 + c.a_0 = 0$; es decir $4 + b = 0$; $b=-4$
Según la recurrencia tenemos que $a_3 + b.\ a_2 + c.a_1 = 0$; es decir $37 – 4.4 + c = 0$; $c = -21$

La ecuación característica de la recurrencia es $r^2 – 4r – 21 = 0$, cuyas soluciones son 7 y -3. Por lo que la solución general es

$$a_n = c_1(7)^n + c_2(-3)^n$$

Como $a_0 = 0$; $0 = c_1+c_2$
Como $a_1 =1$; $1 = c_1 7 - 3c_2$, de donde resulta que $c_2 = -1/10$ y $c_1 = 1/10$

La solución general es: $a_n = \frac{1}{10}(7^n - (-3)^n)$

7.) Encuentra y resuelve una relación de recurrencia para el número de formas de estacionar motos y coches en una fila de n espacios si cada moto ocupa un espacio y cada coche ocupa dos. Las motos se consideran idénticas, los coches también y se quiere utilizar todos los espacios.

SOLUCIÓN:
Sea a_n el número de estacionar motos y coches en n espacios en las condiciones dadas.
Sea a_n^m el número de los anteriores cuyo último espacio esté ocupado por una moto.
Sea a_n^c el número de los anteriores cuyo último espacio esté ocupado por un coche. Es obvio que en el espacio anterior lo ocupa el mismo coche, puesto que un coche ocupa dos espacios por tanto $a_n^c = a_{n-2}$, ya que da igual que dos espacios atrás lo ocupe un coche o una moto y por tanto tengo todas las posibilidades que son a_{n-2}
Por otra parte si supongo que el último espacio de los n es una moto, el anterior puede ser una moto o un coche, por lo que tengo todas las posibilidades en n-1 espacios, es decir a_{n-1}, esto quiere decir que $a_n^m = a_{n-1}$

Como $a_n = a_n^c + a_n^m$, tenemos que $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ para n≥2. a_1=1 (En un espacio solo puede estacionar una moto: 1 caso), a_2=2 (En dos espacios pueden estacionar dos motos o un coche: 2 casos). Es una sucesión de Fibonacci.
Vamos a resolverla:
Sabemos que la sucesión de Fibonacci para n≥0 es

$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$, como en este caso partimos de a_1=1, ya que a_0 no nos vale, la sucesión es:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] = F_{n+1}$$

8.)Para n ≥ 0, sea a_n el número de formas en que una sucesión de unos y doses suma n. Por ejemplo, a_3 = 3, pues (1) 1, 1, 1; (2) 1, 2; (3) 2, 1 suman 3. Encuentra y resuelve una relación de recurrencia para a_n.

SOLUCIÓN:

Sea a_n el número de formas en que una sucesión de unos y doses suma n.
Sea a_n^1 el número de los anteriores cuya última cifra sea un 1. Resulta evidente que $a_n^1 = a_{n-1}$
Sea a_n^2 el número de los anteriores cuya última cifra sea un 2. Resulta evidente que $a_n^2 = a_{n-2}$.
Por tanto $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para n≥2 con a_1=1 y a_0=0. Cuya solución general es

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] = F_{n+1} \text{ con } n\geq 1$$

9.) Encuentra y resuelve una relación de recurrencia para el número de formas de apilar n fichas de póker de color rojo, blanco, verde y azul, de modo que no haya fichas azules consecutivas.

SOLUCIÓN:
a_0 =1 (la disposición vacía sin fichas)
a_1= 4 (Para una ficha hay 4 casos: la verde, la roja, la blanca o la azul)
a_2 = $RV_{4,2} - 1 = 15$ (el que resta es el caso (Azul, azul))
Sea en general a_n = el nº de formas en apilar las n fichas sin que haya dos azules consecutivas.
Llamemos $a_n^r, a_n^v, a_n^b, a_n^a$ al número de casos de los anteriores cuya última ficha es roja, verde, blanca y azul respectivamente.
Se verifica que: $a_n = a_n^r + a_n^v + a_n^b + a_n^a$

Ahora bien; $a_n^r = a_n^v = a_n^b = a_{n-1}$ pues se trata de añadir una ficha de color rojo o verde o blanco al número de formas de apilar n-1 fichas. (*)
El problema surge con a_n^a pues se trata de añadir una ficha azul al numero de formas de apilar n-1 fichas *cuya última ficha no sea azul*. Esto es que su última ficha sea roja, verde o blanca.
Por tanto $a_n^a = a_{n-1}^r + a_{n-1}^v + a_{n-1}^b$, pero razonando como antes $a_{n-1}^r = a_{n-1}^v = a_{n-1}^b = a_{n-2}$
Por tanto $a_n^a = 3a_{n-2}$
La recurrencia buscada es entonces: $a_n = 3a_{n-1} + 3a_{n-2}$ con $n \geq 2$ y $a_1=4$ y $a_2=15$

Vamos a resolverla: La ecuación característica es $r^2-3r-3 = 0$, cuyas soluciones son reales y distintas:

$$\frac{3+\sqrt{21}}{2}, \frac{3-\sqrt{21}}{2}$$

La solución general de nuestra sucesión es $a_n = c_1\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right)^n$

Como $a_0 = 1$ $1=c_1+c_2$

Como $a_1 = 4$ $4 = c_1\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right) - c_1\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right)$

resolviendo el sistema de ecuaciones resulta que $c_1= \frac{5+\sqrt{21}}{2}$ y $c_2 = \frac{-5+\sqrt{21}}{2}$

por lo que la solución buscada es

$$a_n = \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)^n - \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right)^n$$ para $n \geq 0$

10.) Un alfabeto S consta de los cuatro caracteres numéricos 1, 2, 3, 4 y los siete caracteres alfabéticos a, b, c, d, e, f, g. Encuentra y resuelve una relación de recurrencia para el número de palabras de longitud n en S, tales que no aparezcan caracteres alfabéticos consecutivos.

SOLUCIÓN:

Si los a_n buscados acaban en número, la cantidad de ellos es a_{n-1} ya que el anterior puede ser letra o número y por tanto son todos los casos de n-1 caracteres. Como tenemos 4 números, la cantidad total de los que acaban en número es $4.a_{n-1}$.
Si los a_n buscados acaban en letra, los anteriores necesariamente han de acabar en número. Así pues, los a_n que acaban en una letra de las dadas son todos los casos cuyo caracter anterior es número, que razonando como en el primer párrafo son $4.a_{n-2}$, pero como tenemos 7 letras, el total de los acabados en letra es $28\, a_{n-2}$.
La relación de recurrencia buscada es

$$a_n = 4.a_{n-1} + 28.\, a_{n-2}$$

Su ecuación característica es $r^2 - 4r - 28 = 0$, cuyas soluciones son los números reales $2+4\sqrt{2},\quad 2-4\sqrt{2}$. Por tanto la solución general es

$$a_n = c_1\left(2+4\sqrt{2}\right)^n + c_2\left(2-4\sqrt{2}\right)^n$$

Considerando $a_0 = 1$ (caracter vacío) y $a_1=11$

$1=c_1 + c_2$
$11 = c_1\left(2+4\sqrt{2}\right) + c_2\left(2-4\sqrt{2}\right)$
resolviendo el sistema se obtiene $c_1=\dfrac{8+9\sqrt{2}}{16}$ y $c_2=\dfrac{8-9\sqrt{2}}{16}$

La solución general es:

$$a_n = \left(\frac{8+9\sqrt{2}}{16}\right)\left(2+4\sqrt{2}\right)^n + \left(\frac{8-9\sqrt{2}}{16}\right)\left(2-4\sqrt{2}\right)^n$$

11.) Resuelve las relaciones de recurrencia realizando una transformación apropiada:

a) $\left(a_{n+2}\right)^2 - 5\left(a_{n+1}\right)^2 + 4\left(a_n\right)^2 = 0; \quad n \geq 0, \quad a_0 = 4, \quad a_1 = 13$
b) $\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}} - 2\sqrt{a_{n-2}} = 0; n \geq 2, \quad a_0 = a_1 = 1$
c) $na_n + na_{n-1} - a_{n-1} = 2^n; \quad n \geq 1, a_0 = 10$
d) $(a_n)^3 - 2a_{n-1} = 0; \quad n \geq 1, a_0 = 8$
e) $a_n = \dfrac{\sqrt{a_{n-1}}}{(a_{n-2})^2}, n \geq 0; a_0 = 1, a_1 = 2$

SOLUCIÓN:

a) Hacemos $\left(a_n\right)^2 = b_n$. La recurrencia es equivalente a:

$b_{n+2} - 5b_{n+1} + 4b_n = 0; \quad n \geq 0, b_0 = 16, b_1 = 169$, que es lineal homogénea de orden 2.
Su ecuación característica es $r^2 - 5r + 4 = 0$ que tiene por soluciones 4 y 1.
La solución general es
$b_n = c_1(4)^n + c_2$. De las condiciones iniciales se obtiene el sistema
$16 = c_1 + c_2$ y $169 = 4c_1 + c_2$, obteniéndose que $c_1= 51$ y $c_2 = -35$

$b_n = 51.(4)^n - 35$, por tanto $a_n = \sqrt{51.(4)^n - 35}$

b) Hacemos $\sqrt{a_n} = b_n$, obteniéndose la siguiente relación de recurrencia lineal y homogenea de orden 2:

$$b_n - b_{n-1} - 2b_{n-2} = 0; \quad n \geq 2, b_0 = b_1 = 1$$

La ecuación característica es $r^2 - r - 2 = 0$, cuyas soluciones son 2 y -1
La solución general para b_n es:
$b_n = c_1(2)^n + c_2(-1)^n$. De las condiciones iniciales se sigue el sistema siguiente:
$1 = c_1+c_2$ y $1=2c_1 - c_2$, resolviendola se obtiene $c_1 = 2/3$ y $c_2 = 1/3$
por lo que

$b_n = \frac{2}{3}(2)^n + \frac{1}{3}(-1)^n = \frac{1}{3}\left[2^{n+1} + (-1)^n\right]$. La solución final en a_n es

$$a_n = (b_n)^2 = \frac{1}{9}\left[2^{n+1} + (-1)^n\right]^2$$

c) Simplificamos a $na_n + (n-1)a_{n-1} = 2^n$; $n \geq 1,\ a_0 = 10$

Hacemos el siguiente cambio $b_n = n.a_n$, y obtenemos la ecuación no homogénea
$b_n + b_{n-1} = 2^n$; $n \geq 1$ $b_0 = 0.10 = 0$
Para resolver esta recurrencia se considera la homogénea asociada que es
$b_n + b_{n-1} = 0$; $n \geq 1$ con solución $c(-1)^n$ y buscamos otra solución del tipo $A(2)^n$ en la general, de tal modo que $A.2^n + A.2^{n-1} = 2^n$. Dividiendo por 2^{n-1}, resulta:
2A + A = 2, de donde A=2/3.
La solución general es $b_n = \frac{2}{3}2^n + c(-1)^n$, puesto que $b_0=0$, tenemos que
0 = c + (2/3), de donde c= -2/3.
quedando entonces: $b_n = \frac{2}{3}\left[2^n - (-1)^n\right]$ como $a_n = b_n/n$
resulta que $a_n = \frac{2}{3n}\left[2^n - (-1)^n\right]$ para $n \geq 1$ y con $a_0=10$

d) $(a_n)^3 - 2a_{n-1} = 0$; $n \geq 1,\ a_0 = 8$

Hago el cambio siguiente $b_n = \log_2(a_n)$ Así $b_0=3$

$(a_n)^3 = 2a_{n-1}$, tomando $\log_2$ nos queda $3\log_2(a_n) = \log_2 2 + \log_2(a_{n-1})$, quedando entonces $3b_n - b_{n-1} = 1$ con $b_0=3$
; la solución general para el caso homogéneo es $c(1/3)^n$
y busco otra solución del tipo $A(1)^n$. que al sustituir en la recurrencia da 3A-A = 1, por lo que A=1/2.
La solución general es $b_n = c\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}$, como 3 = c + ½ , c = 5/2
$b_n = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 5\right]$, deshaciendo el cambio inicial $a_n = 2^{b_n}$

por tanto la solución pedida es $a_n = 2^{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 5\right]}$

e) $a_n = \frac{\sqrt{a_{n-1}}}{(a_{n-2})^2}$, $n \geq 0$; $a_0 = 1,\ a_1 = 2$
Como a_0 y a_1 son potencias de 2. Tomo $b_n = \log_2(a_n)$, de este modo $b_0=0$ y $b_1=1$

Tomando $\log_2$ en la recurrencia tenemos que:
$\log_2(a_n) = \frac{1}{2}\log_2(a_{n-1}) - 2\log_2(a_{n-2})$, que al hacer el cambio nos queda la siguiente recurrencia lineal y homogenea de orden 2 $b_n - \frac{1}{2}b_{n-1} + 2b_{n-2} = 0$ con $b_0=0$ y $b_1=1$
cuya ecuación característica es $r^2 - (1/2)r + 2 = 0$, que para resolver más cómodamente transformo en $2r^2-r+4=0$ cuyas soluciones son

$\frac{1+i\sqrt{31}}{4}$, $\frac{1-i\sqrt{31}}{4}$, que vamos a pasar a la expresión polar para trabajar de un modo más sencillo.

En ambos casos el módulo de ambas soluciones es $\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{31}}{4}\right)^2} = \sqrt{2}$

el argumento de la primera solución es $\theta = arctg\left(\sqrt{31}\right) = 1{,}3931$ radianes
el argumento de la segunda solución es $\theta = arctg\left(-\sqrt{31}\right) = -1{,}3931$ radianes

Nota teórica:
Recordemos que si un número complejo es de la forma a + bi. En forma polar se expresa mediante su módulo r = $\sqrt{a^2 + b_2}$ *y su argumento* $\theta = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$
Siendo su expresión trigonométrica r(cosθ+isenθ)

Así pues nuestras soluciones las podemos escribir como:
$\sqrt{2}(\cos\theta + isen\theta)$; $\sqrt{2}(\cos\theta - isen\theta)$ ya que cos (-θ) = cos θ y sen (-θ) = - sen θ

Por tanto la solución general de nuestra sucesión b_n será:
$b_n = c_1\left[\sqrt{2}(\cos\theta + isen\theta)\right]^n + c_2\left[\sqrt{2}(\cos\theta - isen\theta)\right]^n$ por la fórmula de Moivre tenemos:
$b_n = c_1\left(\sqrt{2}\right)^n(\cos n\theta + isenn\theta) + c_2\left(\sqrt{2}\right)^n(\cos n\theta - isenn\theta)$ que podemos simplificar en

$k_1\left(\sqrt{2}\right)^n \cos n\theta + k_2\left(\sqrt{2}\right)^n(senn\theta)$ siendo $k_1 = c_1 + c_2$ y $k_2 = i(c_1-c_2)$

Teniendo en cuenta que $b_0=0$ y $b_1=1$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:
$0 = k_1$ y $1 = k_2\left(\sqrt{2}\right)(sen\theta)$, de donde $k_2 = \frac{1}{\sqrt{2}.sen\theta}$

La solución para b_n es $b_n = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n-1} sen\, n\theta}{sen\theta}$
Y la solución para a_n pedida es.

$$a_n = 2^{\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n-1} sen\, n\theta}{sen\theta}}$$ siendo $\theta = arctg\left(\sqrt{31}\right) = 1{,}3931$ radianes

12. Demuestra que dos números de Fibonacci consecutivos son primos relativos.

SOLUCIÓN:
Lo hago por reducción al absurdo suponiendo que entre los a_n números de Fibonacci existen dos consecutivos que no son primos relativos, a partir de a_3, (Puesto que la sucesión es $a_0= 0, a_1= 1$, $a_2= 1$, $a_3= 2$... y por tanto $a_1= 1$, $a_2= 1$ no son primos relativos) es decir que
$\exists k \in N / a_k \;\; y \; a_{k-1}$ no son primos entre sí, con $k\geq 4$.

Como $a_k > a_{k-1}$, $\exists p \in N, p > 1 / a_k = p.a_{k-1}$
Como se verifica que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, En particular para k, $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$,
$p.a_{k-1} = a_{k-1} + a_{k-2}$; $a_{k-1}(p-1) = a_{k-2}$. Sabemos que $p>1$, por lo que pueden ocurrir dos casos:
Si p =1, resulta que $a_{k-2} = 0$, y para $k>3$ no existe ningún número de Fibonacci que sea 0.
Si $p>1$, entonces a_{k-2} es $\geq a_{k-1}$, lo cual es falso para todo número de Fibonacci ya que es una sucesión estrictamente creciente. Falsedad que resulta de suponer que existen dos consecutivos que no son primos.

13.) Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia:
a) $a_{n+1} - a_n = 2n+3 \quad n \geq 0 \quad a_0 = 1$
b) $a_{n+1} - a_n = 3n^2 - n \quad n \geq 0 \quad a_0 = 3$ ***(Propuesto en el examen de Febrero 2009)***
c) $a_{n+1} - a_n = 5 \quad n \geq 0 \quad a_0 = 1$
d) $a_n + na_{n-1} = n! \quad n \geq 1 \quad a_0 = 1$
e) $a_{n+1} - 2a_n = 2^n \quad n \geq 0 \quad a_0 = 1$

SOLUCIÓN:
a) $a_{n+1} - a_n = 2n+3 \quad n \geq 0 \quad a_0 = 1$
$a_1 = a_0 + 3$
$a_2 = a_1 + 5 = (a_0 + 3) + 5 = a_0 +(3 + 5)$
$a_3 = a_2 + 7 = ...$ $= a_0 +(3 + 5+7)$

En general $a_n = a_0 + \sum_{i=o}^{n-1}(2i+3)$ El segundo sumando es la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética cuya solucion es $\frac{(3+2(n-1)+3)n}{2} = n^2 + 2n$

Nota teórica:
Recordemos que en una progresión aritmética $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ la suma de esos n primeros términos (pues empezamos en a_0) de la misma es $(a_0+a_{n-1}).n/2$
(primer término + último término). nº de términos/2

Por tanto la sucesión buscada es $a_n = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ con $n\geq 0$

b) $a_{n+1} - a_n = 3n^2 - n \quad n \geq 0 \quad a_0 = 3$
$a_1 = a_0 + 3.0^2-0$
$a_2 = a_1 + 3.1^2-1= (a_0 + 3.0^2-0) + + 3.1^2-1 = a_0 +3(0^2+1^2)-(0+1)$
$a_3 = a_2 + 3.2^2-2= ....$ $= a_0 +3(0^2+1^2+2^2)-(0+1+2)$

Esto es:

$$a_n = a_0 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i$$

Para hallar ambos sumatorios utilizamos la función sumatoria vista en el temario.
Hay que hallar en primer lugar la función generatriz asociada a $1^2x+2^2x^2+3^2x^3+..$
Procedemos como siempre a partir de la función $f(x) = 1+x+x^2+x^3+... = 1/(1-x)$
Derivamos y obtenemos $1+2x+3x^2+4x^3+... = 1/(1-x)^2$
Multiplico por x y tengo $x+2x^2+3x^3+4x^4+... = x/(1-x)^2$
vuelvo a derivar: $1+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+... = (1+x)/(1-x)^3$
Multiplico por x para llegar a la función buscada, es decir $1^2x+2^2x^2+3^2x^3+...= x(1+x)/(1-x)^3$.

Sabemos pues que $\sum_{i=1}^{n} i^2$ es el coeficiente de x^n de la función $x(1+x)/(1-x)^4$

que es:

$$\binom{-4}{n-2} + \binom{-4}{n-1} = \binom{n+1}{n-2} + \binom{n+2}{n-1} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6} + \frac{(n+2)(n+1)n}{6} = \frac{(n+1)n(2n+1)}{6}$$

Hacemos lo mismo para el otro sumatorio:
Hay que hallar en primer lugar la función generatriz asociada a $1x+2x^2+3x^3+..$
Procedemos como siempre a partir de la función $f(x) = 1+x+x^2+x^3+... = 1/(1-x)$
Derivamos y obtenemos $1+2x+3x^2+4x^3+... = 1/(1-x)^2$
Multiplico por x y tengo $x+2x^2+3x^3+4x^4+... = x/(1-x)^2$
que ya es la función buscada.

Sabemos pues que $\sum_{i=1}^{n} i$ es el coeficiente de x^n de la función $x/(1-x)^3$ que es:

$$\binom{-3}{n-1} = \binom{n+1}{n-1} = \frac{(n+1)n}{2}$$

Por tanto la sucesión buscada es $a_n = 3 + 3.\frac{(n+1)n(2n+1)}{6}$ - $\frac{(n+1)n}{2} = 3 + n(n-1)^2$

Método 2 (por funciones generatrices)
He de encontrar la función generatriz de la sucesión cuyo coeficiente de x^n es el término general a_n buscado., es decir
$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...$ Si la multiplico por -x, obtengo
$-xf(x) = -a_0.x-a_1x^2-a_2x^3+...$
Sumando ambas expresiones resulta:
$(1-x)f(x) = 3 + (a_1-a_0)x + (a_2-a_1)x^2+... = 3 + (3.1^2-1)x^2+(3.2^2-2)x^3+(3.3^2-3)x^4+ ... = 3+3(x^2+2^2x^3+3^2x^4+4^2x^5+...) – (x^2+2x^3+3x^4+...) = 3+3x^2(1+2^2x+3^2x^2+...)-x^2(1+2x+3x^2+...) =$

$3 + \frac{3x^2(1+x)}{(1-x)^3} - \frac{x^2}{(1-x)^2}$, por tanto f(x) = $\frac{3}{1-x} + \frac{(3x^2+3x^3)}{(1-x)^4} - \frac{x^2}{(1-x)^3}$, cuyo coeficiente de grado n es

$$3 + 3\binom{-4}{n-2} + 3\binom{-4}{n-3} - \binom{-3}{n-2} = 3 + 3\binom{n+1}{n-2} + 3\binom{n}{n-3} - \binom{n}{n-2} = 3 + n(n-1)^2$$

c) $a_{n+1} - 2a_n = 5 \quad n \geq 0 \quad a_0 = 1$

Método 1 (clásico)

La solución de la homogénea es $c(2)^n$ y por otra parte busco una solución del tipo $A(1)^n$ verificando la recurrencia, es decir:
A-2A = 5, por lo que A=-5. Entonces la solución general es $a_n=-5+c(2)^n$
Como $a_0=1$, tenemos 1=-5+c, de donde c=6. La solución es $-5+6.2^n$

Método 2 (por funciones generatrices)
He de encontrar la función generatriz de la sucesión cuyo coeficiente de x^n es el término general a_n buscado., es decir
$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...$ Si la multiplico por -2x, obtengo
$-2xf(x) = -2\, a_0x - 2\, a_1x^2 +...$
Sumando ambas igualdades resulta:

$(1-2x)f(x) = a_0+5x+5x^2+5x^3+.... = 1+5(x+x^2+...) = 1+5\left(\frac{1}{1-x}-1\right) = \frac{4x+1}{1-x}$, por tanto

$f(x) = \frac{4x+1}{(1-2x)(1-x)}$ que resolvemos por el método de los coeficientes indeterminados

$\frac{4x+1}{(1-2x)(1-x)} = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-x}$; A(1-x)+B(1-2x) = 4x+1

Para x=1, tenemos –B = 5; B=-5;
Para x=1/2, tenemos (1/2)A =3; A =6

Finalmente $f(x) = \frac{6}{1-2x} - \frac{5}{1-x}$, cuyo coeficiente de x^n es 6.2^n-5

ya que $f(x) = 6(1+2x+2^2x^2+...+2^nx^n+...) - 5(1+x+x^2+...+x^n+...)$

d) $a_n + na_{n-1} = n! \quad n \geq 1 \quad a_0 = 1$

Escribámosla así: $a_n = n! - na_{n-1} \quad n \geq 1 \quad a_0 = 1$

$a_1=0$; $a_2=2!$; $a_3=0$; $a_4=4!$.... En general $a_n = \begin{cases} 0 & si \quad n \quad impar \\ n! & si \quad n \quad par \end{cases}$

e) $a_{n+1} - 2a_n = 2^n \quad n \geq 0 \quad a_0 = 1$

La solución de la homogénea es $c(2)^n$; como la posible solución de la no homogénea sería $A(2)^n$ resultan ambas linealmente dependientes por lo que hay que buscar otra solución del tipo $An.2^n$, que sustituida en la relación de recurrencia produce la siguiente igualdad:
$A(n+1).2^{n+1} - 2.A.n.2^n = 2^n$; dividiendo por 2^n tengo $A(n+1).2 - 2An = 1$
es decir 2A = 1; de donde A=1/2.
La solución general será: $a_n = c(2)^n+(1/2)n.2^n$; como $a_0=1$ resulta que c=1
La solución final es:

$$a_n = 2^n(1+\frac{n}{2}) = 2^{n-1}(n+2)$$

14.) El primero de Noviembre se depositaron 1000 € en una cuenta que paga intereses mensualmente a razón de un 6% anual. Al principio de cada mes, se realizará un ingreso por valor de 200 €. Si se continúa realizando esto durante los próximos cuatro años, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta tras esos cuatro años?

SOLUCIÓN:

Sea a_n el dinero que habrá en la cuenta a primeros del mes enésimo.

Es obvio que $a_n = a_{n-1} + \frac{0,06}{12} a_{n-1} + 200$. Tenemos la relación de recurrencia siguiente:

$a_n - 1,005 a_{n-1} = 200$ para $n \geq 1$ y $a_0=1000$

Resolvemos dicha relación de recurrencia:
Una solución para la homogénea es $c(1,005)^n$ y buscamos una solución de la recurrencia del tipo $A(1)^n$, de modo que:
A-1,005A = 200, de donde A =- 40000
Entonces la solución general de nuestra relación de recurrencia es:
$a_n = c(1,005)^n - 40000$. Teniendo en cuenta que $a_0=1000$, tenemos que
$1000 = c - 40000$, de donde c = 41000
La solución final es:
$a_n = 41000(1,005)^n - 40000$.
Por tanto al cabo de 4 años (es decir 48 meses) tendremos $a_{48} - 200$ ya que en ese mes no contamos los 200 depositados, pues el depósito finaliza.
$a_{48} - 200 = 41000.\ (1,005)^{48} - 40000 - 200 =$ 11.890,05 €

15.) Resuelve la relación de recurrencia
$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 3(2^n) + 7(3^n) \quad n \geq 0, a_0 = 1, a_1 = 4$

SOLUCIÓN:
En primer lugar buscamos la solución particular para la correspondiente homogénea, es decir para $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$ cuya ecuación característica es
r^2-6r+9=0 que tiene por raiz doble 3. Por tanto la solución es
$c_1(3^n)+c_2.n(3^n)$.
Buscamos a continuación una solución para $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 3(2^n)$
Lo intentamos con la forma $A(2^n)$, de modo que
$A(2^{n+2})-6A(2^{n+1})+9(2^n)=3(2^n)$; dividiendo por 2^n, resulta que 4A – 12 A + 9 A = 3; de donde A = 3.

Buscamos por último una solución para $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 7(3^n)$
Como $c_1(3^n)+c_2.n(3^n)$ era ya solución particular para la homogénea, tenemos que intentarlo con $Bn^2(3^n)$, de modo que
$B(n+2)^2(3^{n+2})-6B(n+1)^2(3^{n+1})+9Bn^2(3^n)=7(3^n)$; dividiendo por 3^n, resulta:
$9B(n+2)^2-18B(n+1)^2+9Bn^2=7$; obteniendo que B=7/18
Por tanto la solución general es de la forma:

$a_n = c_1.3^n + c_2.n.3^n + \frac{7}{18} n^2.3^n + 3.2^n$; como a_0 =1, y a_1=4, tenemos:

$1= c_1+3$; de donde $c_1=-2$
$4= -2.3+ c_2.3 + (7/18).3+3.2$; $c_2=17/18$

$$a_n = -2.3^n + \frac{17}{18}.n.3^n + \frac{7}{18}n^2.3^n + 3.2^n = \frac{1}{2}(7n^2 + 17n - 36).3^{n-2} + 3.2^n$$

16.) Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia utilizando funciones generatrices:

a) $a_{n+1} - a_n = 3^n$ **,** $n\geq 0$ y $a_0=1$**.**

b) $a_{n+1} - a_n = n^2$ **,** $n\geq 0$ y $a_0=1$**.**

c) $a_n - 3a_{n-1} = 5^{n-1}$**,** $n\geq 1$ y $a_0=1$

d) $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$**,** $n\geq 0$ y $a_0=1$, $a_1=6$

e) $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2^n$**,** $n\geq 0$ y $a_0=1$, $a_1=2$

SOLUCIÓN:

a) Sea f(x) la función generatriz de la sucesión buscada a_n, es decir:

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...$

entonces $- x. f(x) = \quad -a_0x - a_1x^2 - a_2x^3 - a_3x^4 + ...$

Sumando ambas expresiones, resulta:

$(1-x) f(x) = 1 + 3^0x + 3^1x^2 + 3^2 x^3 + ...$

Multiplico por 3 y obtengo $3(1-x)f(x) = 3 + 3^1x+ 3^2x^2 + 3^3 x^3 + ... = \frac{1}{1-3x} + 2$

(Recordemos que $1/(1-3x) = 1 + 3^1x+ 3^2x^2 + 3^3 x^3 + ...$)

Por tanto $f(x) = \dfrac{\frac{1}{1-3x}+2}{3(1-x)} = \dfrac{1-2x}{(1-x)(1-3x)} = \dfrac{A}{1-x} + \dfrac{B}{1-3x}$ de donde

$A(1-3x) + B (1-x) = 1-2x$

Para $x=1$, $-1 = -2A$; $A = 1/2$

Para $x=1/3$ $B= 1/2$. Así pues tenemos que el coeficiente de grado x^n de $\dfrac{1/2}{1-x} + \dfrac{1/2}{1-3x}$

es $(1/2) + (1/2).3^n$.

La solución pedida es entonces: $a_n = \frac{1}{2}(1+3^n)$

b) Sea f(x) la función generatriz de la sucesión buscada a_n, es decir:

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...$

entonces $- x. f(x) = \quad -a_0x - a_1x^2 - a_2x^3 - a_3x^4 + ...$

Sumando ambas expresiones, resulta:

$(1-x) f(x) = 1 + 0^2 x + 1^2 x^2 + 2^2 x^3 + 3^2 x^4 + ...$

Para obtener la función generatriz del miembro de la derecha hago lo siguiente:

Sea $h(x) = 1+x+x^2+... \quad = 1/(1-x)$
$h'(x) = 1+2x+3x^2 + 4x^3+ ... = 1/(1-x)^2$
$x.h'(x) = x+2x^2+3x^3 + 4x^4+ ... = x/(1-x)^2$

$(x.h'(x))' = 1+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+.... = (1+x)/(1-x)^3$
$x^2. (x.h'(x))' = x^2+2^2x^3+3^2x^4+4^2x^5+.... = x^2(1+x)/(1-x)^3$

La función generatriz de $1 + 0^2 x + 1^2 x^2 + 2^2 x^3 + 3^2 x^4 + ... = x^2(1+x)/(1-x)^3 +1$
Por tanto

$$f(x) = \frac{\frac{x^2(1+x)}{(1-x)^3}+1}{1-x} = \frac{4x^2-3x+1}{(1-x)^4}$$ cuyo coeficiente de grado n es:

$$.\,4\binom{-4}{n-2} - 3\binom{-4}{n-1} + \binom{-4}{n} = 4\binom{n+1}{n-2} - 3\binom{n+2}{n-1} + \binom{n+3}{n} = \frac{(n+1)(2n^2-5n+6)}{6}$$

$$a_n = \frac{(n+1)(2n^2-5n+6)}{6}$$ para $n \geq 0$

c) $a_n - 3a_{n-1} = 5^{n-1}$, $n\geq 1$ y $a_0=1$

Sea f(x) la función generatriz de la sucesión buscada a_n, es decir:
$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...$
entonces $- 3x. f(x) = -3a_0x - 3a_1x^2 - 3a_2x^3 - 3a_3x^4 + ...$
Sumando ambas expresiones, resulta:
$(1-3x) f(x) = 1+5^0 x + 5^1 x^2 + 5^2 x^3 + 5^3 x^4 + ...$
Multiplicando por 5, resulta $5(1-3x)f(x) = 5 + 5^1 x + 5^2 x^2 + 5^3 x^3 + 5^4 x^4 + ...$, cuya función generatriz asociada es $(1/(1-5x)) +4$
Por tanto tenemos que

$$f(x) = \frac{\frac{1}{1-5x}+4}{5(1-3x)} = \frac{1-4x}{(1-5x)(1-3x)} = \frac{A}{1-5x} + \frac{B}{1-3x}$$

$1-4x = A(1-3x) +B(1-5x)$
Para $x=1/3$, tenemos $-1/3 = B.(-2/3)$; $B = 1/2$
Para $x=1/5$, tenemos $1/5 = A(2/5)$; $A = 1/2$

La función generatriz es $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-5x} + \frac{1}{1-3x}\right)$ cuyo coeficiente de x^n es

$$\frac{1}{2}\left(5^n + 3^n\right)$$ para $n\geq 1$

d) $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$, $n\geq 0$ y $a_0=1$, $a_1=6$

Sea f(x) la función generatriz de la sucesión buscada a_n, es decir:
$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...$
entonces $- 3x. f(x) = -3a_0x - 3a_1x^2 - 3a_2x^3 - 3a_3x^4 + ...$
y... $2x^2.f(x) = 2 a_0 x^2 + 2 a_1x^3 + ...$
Sumando las tres expresiones, resulta:

$(1-3x+2x^2)f(x) = a_0 +(a_1-3\ a_0)x = 1+3x$

$f(x) = (1+3x)/(1-3x+2x^2)$. De donde:

$$\frac{1+3x}{1-3x+2x^2} = \frac{1+3x}{(x-1)(2x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{2x-1}; \qquad 1+3x = A(2x-1)+B(x-1)$$

Para $x=1$; $4 = A$; Para $x=1/2$; $5/2 = (-1/2)B$; $B=-5$

$$f(x) = \frac{-4}{1-x} + \frac{5}{1-2x}$$ cuyo coeficiente de grado x^n es:

$$a_n = -4 + 5.2^n$$

e) $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2^n$, $n\geq 0$ y $a_0=1$, $a_1=2$

Sea f(x) la función generatriz de la sucesión buscada a_n, es decir:

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...$

entonces $-2x.\ f(x) = -2a_0x - 2a_1x^2 - 2a_2x^3 - 2a_3x^4 + ...$

y... $x^2.f(x)= a_0\ x^2 + a_1x^3 + ...$

Sumando las tres expresiones, resulta:

$(1-2x+x^2)f(x) = a_0 +(a_1-2\ a_0)x +2^0x^2 + 2^1x^3 + 2^2x^4 +... = 1+2^0x^2 + 2^1x^3 + 2^2x^4 +...$ (1)

Sabemos que $1/(1-2x) = 1+ 2^1x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + 2^4x^4 +...$ de modo que si lo multiplico por x^2, obtengo $x^2/(1-2x) = x^2+ 2^1x^3 + 2^2x^4 + 2^3x^5 + 2^4x^6 +...$
que difiere de la expresión (1) en 1.
Por tanto tenemos que
$(1-2x+x^2)f(x) = (x^2/(1-2x))+1$, de donde

$$f(x) = \frac{\frac{x^2}{1-2x}+1}{1-2x+x^2} = \frac{x^2-2x+1}{(1-2x)(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2}{(1-2x)(x-1)^2} = \frac{1}{1-2x}$$

por tanto el coeficiente de x^n es $a_n = 2^n$ con $n\geq 0$

17.) Resuelve los siguientes sistemas de relaciones de recurrencia:

a) $\begin{cases} a_{n+1} = -2a_n - 4b_n \\ b_{n+1} = 4a_n + 6b_n \end{cases}$ ***con n≥0, $a_0=1$; $b_0=0$***

b) $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - b_n + 2 \\ b_{n+1} = -a_n + 2b_n - 1 \end{cases}$ ***con n≥0, $a_0=0$; $b_0=1$***

SOLUCIÓN:

a) Sea f(x) la función generatriz de la sucesión a_n, es decir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Sea g(x) la función generatriz de la sucesión b_n, es decir $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

Multipliquemos ambas recurrencias por x^{n+1}, obteniendo:

$$a_{n+1}x^{n+1} = -2a_n x^{n+1} - 4b_n x^{n+1}$$

$$b_{n+1}x^{n+1} = 4a_n x^{n+1} + 6b_n x^{n+1}$$

Tomando sumatorios desde 0 hasta ∞ tenemos:

$$\sum_{n(0)}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} = -2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 4x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$\sum_{n(0)}^{\infty} b_{n+1}x^{n+1} = 4x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 6x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

que expresadas en términos de f(x) y g(x) sería:

$$\begin{array}{l} f(x) - 1 = -2xf(x) - 4xg(x) \\ g(x) = 4xf(x) + 6xg(x) \end{array}$$

resolviendo este sistema cuyas incógnitas serían las funciones f(x) y g(x), obtenemos:

$$f(x) = \frac{-12x^2 - 4x + 1}{(1+2x)(1-2x)^2} \quad g(x) = \frac{4x}{(1-2x)^2}$$

Resulta obvio que el coeficiente de x^n de g(x) es 4.(coeficiente de x^{n-1} en $(1-2x)^{-2}$) es decir:

$4\binom{-2}{n-1}2^{n-1} = \binom{n}{n-1}2^{n+1} = n.2^{n+1}$. Por tanto ya tenemos que $b_n = n.2^{n+1}$

Para resolver a_n calculamos el coeficiente de x^n en f(x). para lo que hay que recurrir al método de los coeficientes indeterminados:

$\frac{-12x^2 - 4x + 1}{(1+2x)(1-2x)^2} = \frac{A}{1+2x} + \frac{B}{1-2x} + \frac{C}{(1-2x)^2}$. Resolviendo esta igualdad resulta A=0, B=3 y C=-2

Así pues el coeficiente de x^n en la expresión es:

$$3.2^n - 2.\binom{-2}{n}2^n = 3.2^n - 2(n+1)2^n = 2^n(1-2n)$$

b) Sea f(x) la función generatriz de la sucesión a_n, es decir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Sea g(x) la función generatriz de la sucesión b_n, es decir $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

Multipliquemos ambas recurrencias por x^{n+1}, obteniendo:

$$a_{n+1}x^{n+1} = 2a_n x^{n+1} - b_n x^{n+1} + 2x^{n+1}$$

$$b_{n+1}x^{n+1} = -a_n x^{n+1} + 2b_n x^{n+1} - x^{n+1}$$

Tomando sumatorios desde 0 hasta ∞ tenemos:

$$\sum_{n(0)}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} = 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + 2x\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\sum_{n(0)}^{\infty} b_{n+1}x^{n+1} = -x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 2x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - x\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

que expresadas en términos de f(x) y g(x) sería:

$$f(x) = 2xf(x) - xg(x) + \frac{2x}{1-x}$$

$$g(x) - 1 = -xf(x) + 2xg(x) - \frac{x}{1-x}$$

multiplicando por 2 la segunda ecuación y sumándosela a la primera, obtenemos $2g(x) - 2 + f(x) = 3xg(x)$ de donde $f(x) = g(x)(3x-2) + 2$

Sustituyendo en la segunda ecuación tenemos

$g(x) - 1 = -x[g(x)(3x-2) + 2] + 2xg(x) - \frac{x}{1-x}$; desarrollando:

$$g(x)(1 + x(3x-2) - 2x) = 1 - 2x - \frac{x}{1-x};\ g(x)(3x^2 - 4x + 1)(1-x) = 1 - x - 2x(1-x) - x$$

$$g(x)(1-x)^2(1-3x) = 2x^2 - 4x + 1;\ g(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{(1-x)^2(1-3x)}$$

Utilizando el método de los coeficiente indeterminados:

$g(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-3x)}$; A(1-3x)(1-x)+B(1-3x)+C(1-x)^2 = 2x^2-4x+1

Si x= 1; -2 B = -1 ; B = 1/2

Si x=1/3; (4/9)C = -1/9 ; C=-1/4

Si x=0; A+B+C = 1; A=3/4

$\frac{2x^2 - 4x + 1}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{3/4}{(1-x)} + \frac{1/2}{(1-x)^2} - \frac{1/4}{(1-3x)}$, cuyo coeficiente de x^n es

$$b_n = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\binom{-2}{n} - \frac{1}{4}3^n = \frac{1}{4}\left(2n + 5 - 3^n\right)$$

Puesto que $f(x) = g(x)(3x-2) + 2$ como ya vimos, sustituimos el valor funcional de g(x) obteniendo:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{(1-x)^2(1-3x)}(3x-2) + 2 = \frac{x - 2x^2}{(1-x)^2(1-3x)}$$

$\frac{x - 2x^2}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-3x)}$; A(1-3x)(1-x)+B(1-3x)+C(1-x)^2 = x-2x^2

Si x= 1; -2 B = -1 ; B = 1/2

Si x=1/3; (4/9)C = 1/9 ; C=1/4

Si x=0; A+B+C = 0; A=-3/4

$$\frac{x-2x^2}{(1-x)^2(1-3x)}=\frac{-3/4}{(1-x)}+\frac{1/2}{(1-x)^2}+\frac{1/4}{(1-3x)}$$ cuyo coeficiente de x^n es

$$a_n=-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\binom{-2}{n}+\frac{1}{4}3^n \quad =\frac{1}{4}\left(2n-1+3^n\right)$$

18) Una partícula se mueve en dirección horizontal. La distancia que recorre en cada segundo es igual a dos veces la distancia que recorre en el segundo anterior. Si a_n denota la posición de la partícula en el segundo n-ésimo, encontrar una relación de recurrencia para a_n (Propuesto en el examen de Febrero 2009)

SOLUCIÓN:
Si a_n denota la posición en el segundo n-ésimo y a_{n-1} es la posición de la partícula en el segundo anterior, la distancia recorrida por la partícula en el segundo n-ésimo es a_n-a_{n-1}. Dado que esa distancia es el doble que la recorrida en el segundo anterior ($a_{n-1} - a_{n-2}$), la relación de recurrencia pedida es:

$$a_n-a_{n-1} = 2\,(a_{n-1} - a_{n-2})$$

PROBLEMAS DE LA UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

1) Resolver las siguientes relaciones de recurrencia homogéneas, con sus condiciones iniciales:

a) $a_n=4a_{n-1}-4a_{n-2}\ ,n\geq 2, a_0=6, a_1=8$
b) $a_n=7a_{n-1}-10a_{n-2}\ ,n\geq 2, a_0=2, a_1=1$
c) $a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}\ ,n\geq 2, a_0=4, a_1=1$
d) $a_{n+2}=-4a_{n+1}+5a_n\ ,n\geq 0, a_0=2, a_1=8$
e) $a_n=6a_{n-1}-11a_{n-2}+6a_{n-3}\ ,n\geq 3, a_0=2, a_1=5, a_2=15$
f) $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}\ ,n\geq 2, a_0=1, a_1=0$

SOLUCIÓN:
<u>Método tradicional:</u>
Es una relación de recurrencia homogénea cuya ecuación característica es $r^2-4r+4=0$ que tiene una raíz doble: 2.
Por tanto su solución general es $c(2)^n+c'n(2)^n$
Según las condiciones inciales: $6 = c$; $8 = 6.2+c'.2$; $c'=-2$
La solución es por tanto:

$$a_n=2^{n+1}(3-n) \quad n\geq 0$$

<u>Método de funciones generatrices</u>:
Sea $f(x) = a_0+a_1 x+a_2x^2+a_3x^3+ \ldots$ la función generatriz de la sucesión buscada.
$-4xf(x) = -4xa_0-4 a_1 x^2-4 a_2x^3 -4 a_3x^4 - \ldots$
$4x^2f(x) = +4 a_0 x^2+4 a_1 x^3+4 a_2x^4 +4 a_3x^5$
Sumando las tres expresiones:

$(1-4x+4x^2)f(x) = a_0+a_1x-4xa_0$; de donde $f(x) = \dfrac{6-16x}{1-4x+4x^2}$ cuyo coeficiente de x^n es la sucesión que estamos buscando:

$$\frac{6-16x}{1-4x+4x^2}=\frac{A}{(2x-1)}+\frac{B}{(2x-1)^2}$$

A(2x-1)+B=6-16x ; si x=1/2; B = -2
si x= 0; -A-2 = 6; A = -8

$$\frac{8}{(1-2x)}-\frac{2}{(1-2x)^2}$$ siendo el coeficiente de x^n

$$8.2^n-2\binom{-2}{n}2^n=2^{n+3}-2^{n+1}.(n+1)=2^{n+1}(3-n) \quad \text{para } n\geq 0$$

b)
Método tradicional:
Es una relación de recurrencia homogénea cuya ecuación característica es $r^2-7r+10=0$ que tiene dos raíces reales: 5 y 2.
Por tanto su solución general es $c(2)^n+c'(5)^n$
Según las condiciones iniciales: 2 = c+c'; 1 = 2c+5c'; c'=-1 y c=3
La solución es por tanto:

$$a_n=3.2^n-5^n \quad n\geq 0$$

Método de funciones generatrices:
Sea $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+ \ldots$ la función generatriz de la sucesión buscada.
$-7xf(x) = -7xa_0-7a_1x^2-7a_2x^3-7a_3x^4 - \ldots$
$10x^2f(x) = +10a_0x^2+10a_1x^3+10a_2x^4+10a_3x^5$
Sumando las tres expresiones:

$(1-7x+10x^2)f(x) = a_0+a_1x-7xa_0$; de donde $f(x) = \dfrac{2-13x}{1-7x+10x^2}$ cuyo coeficiente de x^n es la sucesión que estamos buscando:

$$\frac{2-13x}{(1-2x)(1-5x)}=\frac{A}{(1-2x)}+\frac{B}{(1-5x)^2}$$

A(1-5x)+B(1-2x)=2-13x; si x=1/5; (3/5)B = -3/5; B=-1
si x= 1/2; (-3/2)A = -9/2; A = 3

$$\frac{3}{(1-2x)}+\frac{-1}{(1-5x)^2}$$ siendo el coeficiente de x^n

3.2^n-5^n para $n\geq 0$

c)
Método tradicional:
Es una relación de recurrencia homogénea cuya ecuación característica es $r^2-2r+1=0$ que tiene una raíz doble: 1.
Por tanto su solución general es $c(1)^n+c'n(1)^n$
Según las condiciones iniciales: 4 = c; 1 = c+c'; c'=-3
La solución es por tanto:

$$a_n=4-3n \quad n\geq 0$$

Método de funciones generatrices:

Sea $f(x) = a_0+a_1 x+a_2x^2+a_3x^3+ ...$ la función generatriz de la sucesión buscada.
$-2xf(x) = -2xa_0-2 a_1 x^2-2 a_2x^3 -2 a_3x^4 - ...$
$x^2f(x) = a_0 x^2+ a_1 x^3+ a_2x^4 + a_3x^5$
Sumando las tres expresiones:

$(1-2x+x^2)f(x) = a_0+a_1 x-2xa_0$; de donde $f(x) = \dfrac{4-7x}{1-2x+x^2}$ cuyo coeficiente de x^n es la sucesión que estamos buscando:

$$\frac{4-7x}{(1-x)^2}=\frac{A}{(1-x)}+\frac{B}{(1-x)^2}$$

$A(1-x)^2+B=4-7x$; si $x=1$; $B = -3$;
si $x= 0$; $A-3 = 4$; $A = 7$

$\dfrac{7}{(1-x)}+\dfrac{-3}{(1-x)^2}$ siendo el coeficiente de x^n

$7-3\binom{-2}{n}$ = 7-3(n+1) = 4-3n para $n\geq 0$

d)
Método tradicional:
Es una relación de recurrencia homogénea cuya ecuación característica es $r^2+4r-5=0$ que tiene dos raices 1, -5
Por tanto su solución general es $c(1)^n+c'(-5)^n$
Según las condiciones iniciales: $2 = c+c'$; $8 = c-5c'$; $c=3$ y $c'=-1$
La solución es por tanto:

$$a_n = 3-\left(-5^n\right) \quad n\geq 0$$

Método de funciones generatrices:
Sea $f(x) = a_0+a_1 x+a_2x^2+a_3x^3+ ...$ la función generatriz de la sucesión buscada.
$4xf(x) = 4xa_0+4 a_1 x^2+4 a_2x^3 +4 a_3x^4 - ...$
$-5x^2f(x) = -5a_0 x^2-5 a_1 x^3-5 a_2x^4 -5 a_3x^5$
Sumando las tres expresiones:

$(1+4x-5x^2)f(x) = a_0+a_1 x+4xa_0$; de donde $f(x) = \dfrac{2+16x}{1+4x-5x^2}$ cuyo coeficiente de x^n es la sucesión que estamos buscando:

$$\frac{2+16x}{(1-x)(1+5x)}=\frac{A}{(1-x)}+\frac{B}{(1+5x)}$$

$A(1+5x)+B(1-x)=2+16x$; si $x=-1/5$; $(6/5) B = -6/5$; $B=-1$
si $x= 1$; $6A= 18$; $A = 3$

$\dfrac{3}{(1-x)}-\dfrac{1}{(1+5x)}$ siendo el coeficiente de x^n

$3-(-5)^n$ para $n\geq 0$

e) $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$, $n\geq 3, a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 15$

Método tradicional:
Es una relación de recurrencia homogénea de orden 3 cuya ecuación característica es $r^3-6r^2+11r-6=0$ que tiene tres raices 1, 2, 3

Por tanto su solución general es $c(1)^n+c'(2)^n+c''(3)^n$
Según las condiciones iniciales: 2 = c+c'+c'' ; 5 = c+2c'+3c''; 15 = c+4c'+9c'' de donde c=1 , c'=-1 y c''=2
La solución es por tanto:

$$a_n = 1 - 2^n + 2.3^n \quad n \geq 0$$

Método de funciones generatrices:
Sea $f(x) = a_0+a_1 x+a_2x^2+a_3x^3+ \ldots$ la función generatriz de la sucesión buscada.
$-6xf(x) = -6xa_0-6 a_1 x^2-6 a_2x^3 -6 a_3x^4 - \ldots$
$11x^2f(x) = 11a_0 x^2+11 a_1 x^3+11 a_2x^4 +11 a_3x^5$
$-6x^3f(x) = -6a_0 x^3-6 a_1 x^4-6 a_2x^5 -6 a_3x^6$
Sumando las cuatro expresiones:
$(1-6x+11x^2-6x^3)f(x) = a_0+a_1 x-6xa_0+a_2x^2-6 a_1x^2+11 a_0x^2= 2-7x+7x^2$;
de donde $f(x) = \dfrac{2-7x+7x^2}{(1-x)(1-3x)(1-2x)}$ cuyo coeficiente de x^n es la sucesión que estamos buscando:

$$\frac{2-7x+7x^2}{(1-x)(1-3x)(1-2x)} = \frac{A}{(1-x)} + \frac{B}{(1-3x)} + \frac{C}{(1-2x)}$$

$A(1-3x)(1-2x)+B(1-x)(1-2x)+C(1-x)(1-3x) = 2-7x+7x^2$
Si x=1/3; B(2/3)(1/3)=4/9; B = 2
Si x=1; 2A = 2; A=1
Si x=1/2 ; C(1/2)(-1/2)=1/4; C=-1
$\dfrac{1}{(1-x)} + \dfrac{2}{(1-3x)} + \dfrac{-1}{(1-2x)}$ tiene por coeficiente de x^n $1+2.3^n-2^n$

f) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, $n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 0$
Método tradicional:
Es una relación de recurrencia homogénea cuya ecuación característica es $r^2-5r+6=0$ que tiene dos raices: 2 y 3
Por tanto su solución general es $c(2)^n+c'(3)^n$
Según las condiciones iniciales: 1 = c+c'; 0 = 2c+3c'; de donde c'=-2 y c=3
La solución es por tanto:

$$a_n = 3.2^n - 2.3^n \quad n \geq 0$$

Método de funciones generatrices:
Sea $f(x) = a_0+a_1 x+a_2x^2+a_3x^3+ \ldots$ la función generatriz de la sucesión buscada.
$-5xf(x) = -5xa_0-5a_1 x^2-5 a_2x^3 -5 a_3x^4 - \ldots$
$6x^2f(x) = 6a_0 x^2+ 6a_1 x^3+ 6a_2x^4 + 6a_3x^5$
Sumando las tres expresiones:
$(1-5x+6x^2)f(x) = a_0+a_1 x-5xa_0$; de donde $f(x) = \dfrac{1-5x}{1-5x+6x^2}$ cuyo coeficiente de x^n es la sucesión que estamos buscando:

$$\frac{1-5x}{1-5x+6x^2} = \frac{A}{(1-3x)} + \frac{B}{(1-2x)}$$

A(1-2x)+B(1-3x)=1-5x; si x=1/2; (-1/2)B = -3/2; B = 3; Si x=1/3; (1/3)A=(-2/3); A=-2 si x= 0; A-3 = 4; A = 7

$\frac{-2}{(1-3x)}+\frac{3}{(1-2x)}$ siendo el coeficiente de x^n

$-2.3^n+3.2^n$ para $n\geq 0$

2) Sea an el número de palabras de longitud n formadas con los dígitos {0,1}, que no tienen dos ceros consecutivos. Encontrar una relación de recurrencia para calcular an y resolverla.

SOLUCIÓN:

Descartamos a_0 pues no tiene sentido para nosotros**.**

Sea $a_1=2$ (0 y 1) $a_2= 3$ (01, 10, 11)

Sea a_n el número de palabras pedidas en esas condiciones.

Llamemos a_{n1} a las acabadas en 1 de las a_n

Llamemos a_{n0} a las acabadas en 0 de las a_n

Es obvio que $a_n = a_{n1} + a_{n0}$

Si acaba en 1, la cifra anterior puede ser 1 o 0, con lo que a_{n1} = n-1

Si acaba en 0, la cifra anterior solo puede ser 1, con lo que $a_{n0} = a_{(n-1)1}$ = n-2

Por tanto $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, para n>2

La resolvemos:

Su ecuación característica es $r^2-r-1=0$, cuyas soluciones son $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

La solución general es del tipo

$a_n=c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c'\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Bajo las condiciones iniciales $a_1=2$ y $a_2=3$, y resolviendo el sistema que generan, tenemos que

La solución es: $a_n=\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ para $n\geq 1$

(solución comprobada)

3) Hallar una relación de recurrencia para el número de formas en que una persona puede subir n escalones si puede subir uno o dos peldaños en cada paso.

SOLUCIÓN:

Análogo al anterior.

Consideramos $a_1=1$, ya que tenemos un solo escalón y solo hay la posibilidad de subir un peldaño. Por otra parte $a_2 = 2$, ya que lo podemos subir de uno en uno o de dos en dos, es decir 11, 2.

Consideremos como antes, lo siguiente:

Sea a_n el número de formas pedidas en esas condiciones.

Llamemos a_{n1} a las a_n cuyo último escalón alcanzo tras subir un peldaño

Llamemos a_{n2} a las a_n cuyo último escalón alcanzo tras subir dos peldaños

Es obvio que $a_n = a_{n1} + a_{n2}$

Si acabo con 1 solo peldaño, el escalón anterior lo puede haber alcanzado subiendo 1 peldaño o dos $a_{n1} = n-1$
Si llego al último escalón n subiendo dos peldaños, el escalón anterior (n-1) forma parte de esos dos peldaños, con lo que $a_{n2} = a_{(n-1)1} = n-2$
Por tanto $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, para n>2
La resolvemos como antes y el resultado cambia porque cambian las condiciones iniciales ($a_1=1$, $a_2=2$). Procediendo como en el problema anterior el resultado final es:

$$a_n = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$ para n≥1. También se puede expresar así:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] = F_{n+1}$$

Por ejemplo $a_3 = a_2 + a_1 = 3$. En efecto, los casos en que podemos subir 3 escalones son: 111, 21, 12
Por ejemplo $a_4 = a_3 + a_2 = 5$. En efecto, los casos en que podemos subir 4 escalones son: 1111, 121, 112, 211, 22

Este ejercicio es equivalente a este:
Para n ≥ 0, sea a_n el número de formas en que una sucesión de unos y doses suma n. Por ejemplo, $a_3 = 3$, pues (1) 1, 1, 1; (2) 1, 2; (3) 2, 1 suman 3. Encuentra y resuelve una relación de recurrencia para a_n. (hecho anteriormente)

4.) Sea C = {A, B, C} y sea Sn el conjunto de cadenas de longitud n formadas con las letras de C que tienen un número par de letras A consecutivas. Encontrar una relación de recurrencia para calcular Sn y resolverla.

SOLUCIÓN:
$S_1=0$; $S_2=1$ (AA)
Sea S_n el conjunto pedido.
Sea S_{nA} el conjunto de las anteriores que acaben en A
Sea S_{nB} el conjunto de las anteriores que acaben en B
Sea S_{nC} el conjunto de las anteriores que acaben en C

$S_n = S_{nA} + S_{nB} + S_{nC}$

Si la cadena acaba en B o en C, la cadena de n-1 letras puede acabar en A, B o C indistintamente, con lo que $S_{nB} = S_{nC} = n-1$

Ahora bien, si la cadena de n letras acaba en A, resulta que la letra anterior tiene que ser A, puesto que si no fuese así tendríamos una A aislada (número impar) Por tanto si acaba en A, resulta que la letra anterior tiene que ser también A, pero la antepenúltima ya puede ser cualquier letra A, B o C. Con lo que $S_{nA} = S_{n-2}$

La relación de recurrencia es
$S_n = 2S_{n-1} + S_{n-2}$
La resolvemos y su ecuación característica es r^2-2r-1=0 cuyas soluciones son $2 \pm \sqrt{2}$
Por tanto la solución general es:
$a_n = c(2+\sqrt{2})^n + c'(2-\sqrt{2})^n$. Como S_1=0; S_2=1, resolviendo el sistema se obtiene que $c = \frac{\sqrt{2}-1}{4}$ $c' = \frac{\sqrt{2}+1}{4}$
La solución es:
$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{4}\right)(2+\sqrt{2})^n + \left(\frac{\sqrt{2}+1}{4}\right)(2-\sqrt{2})^n$, para n>0

Solución comprobada para n=1,2,3
Para a_3 = 4. En efecto son los casos (AAB, BAA, AAC, CAA)

5) Resolver las siguientes relaciones de recurrencia

a) $a_n = a_{n-1} + 2n - 1 \quad , a_1 = 1$
b) $a_n - a_{n-1} = 3n^2, a_0 = 8$
c) $a_n - 3a_{n-1} = 7^n.5, a_0 = 2$
d) $a_n - 3a_{n-1} = 3^n.5, a_0 = 2$
e) $a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3} + n^2$; a_0=11; a_1=1; a_2=-1
f) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n$; a_0=1; a_1=3

SOLUCIÓN:
a) $a_n = a_{n-1} + 2n - 1 \quad , a_1 = 1$
Procedemos así:
a_1 =1; a_2 = 1+3; a_3 = 1+3+5 ... en general $a_n = \sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = n^2$ (*)
* 2i-1 para i=1,2... es una progresión aritmética. La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética b_n es $S_n=(b_1+b_n).n/2$.
En nuestro caso $a_n = \sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = \frac{(1+2n-1)n}{2} = n^2$

b) $a_n - a_{n-1} = 3n^2, a_0 = 8$

Lo haré por funciones generatrices:

Sea $f(x) = a_0+a_1 x+a_2x^2+a_3x^3+ ...$ la función generatriz de la sucesión buscada.
$-xf(x) = -xa_0-a_1 x^2-a_2x^3 - a_3x^4 - ...$
Sumando ambas igualdades, resulta
$(1-x)f(x) = 8 + 3(x+2^2x^2+3^2x^3+4^2x^4+...)$
Vamos a deducir la función generatriz asociada a la serie $x+2^2x^2+3^2x^3+4^2x^4+...$
Sea $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... = 1/(1-x)$
$g'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... = 1/ (1-x)^2$
$x.g'(x)= x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + ... = x/(1-x)^2$
$(x.g'(x))' = 1 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3+... = (1+x)/(1-x)^3$
$x.(x.g'(x))' = x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4+... = x(1+x)/(1-x)^3$

Entonces $(1-x)f(x) = 8 + 3\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$. En consecuencia:

$f(x) = \dfrac{8}{1-x} + \dfrac{3x(1+x)}{(1-x)^4}$ cuyo coeficiente de x^n es el término general que estoy buscando para la sucesión a_n

$$a_n = 8 + 3\binom{-4}{n-1} + 3\binom{-4}{n-2} = 8 + 3\binom{n+2}{n-1} + 3\binom{n+1}{n-2} = 8 + \frac{(n+2)(n+1)n}{2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{2}$$

$$\boxed{a_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n + 16}{2}} \quad n\geq 0$$

c) $a_n - 3a_{n-1} = 7^n.5, a_0 = 2$

La recurrencia homogénea asociado es una geométrica de razón 3, por lo que una solución para ésta sería $c(3)^n$. Ahora buscamos una solución en $A(7)^n$ verificando la recurrencia dada, es decir:
$A(7^n)-3 A (7^{n-1}) = 7^n.5$. Dividiendo por 7^{n-1}, tenemos que $7A – 3A = 35$, de donde $A=35/4$
La solución es del tipo $c(3^n)+ (35/4)(7^n)$. Como $a_0=2$, tenemos que $2 = c + (35/4)$, de donde $c = 2 – (35/4) = -27/4$.
La solución general es $\boxed{a_n = \dfrac{7^{n+1}.5 - 27.3^n}{4}}$ para $n\geq 0$

(Sale bien por funciones generatrices, aunque se hace más pesado)

d) $a_n - 3a_{n-1} = 3^n.5, a_0 = 2$

Pudiera parecer idéntica a la anterior, pero varía en que la solución de la homogénea que es $c(3^n)$ y la supuesta solución para la recurrencia $A(3^n)$ son obviamente dependientes, por lo que en este caso hay que tomar $An(3^n)$ como posible solución de la recurrencia dada, es decir que se verifique:
$An(3^n) – 3A(n-1)(3^{n-1}) = 3^n.5$, divido por 3^{n-1} y obtengo: $3An – 3A(n-1)=15$, de donde

A = 5.
La solución genérica es $(c+5n)3^n$. Como $a_0=2$, tenemos c=2, siendo por tanto la solución $a_n=(2+5n).3^n$ para $n\geq 0$

e) $a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3} + n^2$; $a_0=11$; $a_1=1$; $a_2=-1$

Vamos a resolverlo por funciones generatrices ya que es de orden 3 y es el primero que aparece de este tipo (obsérvese que el coeficiente de a_{n-2} es 0)

Sea $f(x) = a_0+a_1 x+a_2x^2+a_3x^3+ \dots$ la función generatriz de la sucesión buscada.
$-3xf(x) = -3xa_0-3 a_1 x^2-3 a_2x^3 -3 a_3x^4 - \dots$
$4x^3f(x) = 4a_0 x^3+4 a_1 x^4+4 a_2x^5 +4 a_3x^6 + \dots$
Sumando las tres expresiones:
$(1-3x+4x^3)f(x) = a_0+a_1 x-3xa_0+a_2x^2-3 a_1x^2+(3^2x^3 + 4^2x^4 + 5^2 x^5 + \dots)$;

$$(1-3x+4x^3)f(x)= \left(11 - 32x - 4x^2\right)+\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}-(x+4x^2)$$

$$f(x) = \frac{8x^5+9x^4-86x^3+125x^2-65x+11}{(1-x)^3(1+x)(1-2x)^2}=$$

$$\frac{A}{(1-x)}+\frac{B}{(1-x)^2}+\frac{C}{(1-x)^3}+\frac{D}{1+x}+\frac{E}{(1-2x)}+\frac{F}{(1-2x)^2}$$

resultando que
$8x^5+9x^4-86x^3+125x^2-65x+11 =$
$A(1-x)^2(1+x)(1-2x)^2+B(1-x)(1+x)(1-2x)^2+C(1+x)(1-2x)^2+D(1-x)^3(1-2x)^2+$
$+E(1-x)^3(1+x)(1-2x)+F(1-x)^3(1+x)$
Si x=1; 2=2C; C =1
Si x=-1; 288 = 72D; D=4
Si x=1/2; -3/16 = 3F/16 ; F = -1
Si x=0; 11=A+B+1+4+E-1; A+B+E=7
Si x=2; 93=27 A-27B+9E-6; 3A-3B+E=11
Si x=-2; 15A+5B+9E=99
Resolviendo ese sistema de tres ecuaciones con 3 incógnitas, obtenemos
A=8; B=3; E=-4

$$\frac{8}{(1-x)}+\frac{3}{(1-x)^2}+\frac{1}{(1-x)^3}+\frac{4}{1+x}+\frac{-4}{(1-2x)}+\frac{-1}{(1-2x)^2}$$, siendo el coeficiente en x^n

$$a_n = 8+3\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+4(-1)^n-4.2^n-\binom{n+1}{n}2^n=$$

$$3n+11+\frac{(n+2)(n+1)}{2}-2^n(n+5)+4(-1)^n$$ para $n\geq 0$

f) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n$; $a_0=1$; $a_1=3$

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = n$$

Sea $f(x) = a_0+a_1 x+a_2x^2+a_3x^3+ \dots$ la función generatriz de la sucesión buscada.

$-4xf(x) = -4xa_0-4\, a_1\, x^2-4\, a_2x^3\, -4\, a_3x^4\, - \ldots$
$4x^2f(x) = 4a_0\, x^2+4\, a_1\, x^3+4\, a_2x^4\, +4\, a_3x^5$
Sumamos
$(1-4x+4x^2)f(x) = a_0+a_1\, x-4xa_0 +(2x^2+3x^3+4x^4+\ldots) = 1-x + (2x^2+3x^3+4x^4+\ldots)$

Es fácil demostrar que $2x^2+3x^3+4x^4+\ldots = \frac{x}{(1-x)^2} - x$

Por tanto $(1-4x+4x^2)f(x) = 1-2x+\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{-2x^3+5x^2-3x+1}{(1-x)^2}$

$$f(x) = \frac{-2x^3+5x^2-3x+1}{(1-x)^2(1-2x)^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-2x} + \frac{D}{(1-2x)^2}$$

$-2x^3+5x^2-3x+1 = A(1-2x)^2(1-x)+B(1-2x)^2+C(1-x)^2(1-2x)+D(1-x)^2$
Si $x=1$; $1=B$
Si $x=1/2$; $1/2=D/4$; $D=2$
Si $x=0$; $1=A+1+C+2$; $A+C=-2$
Si $x=2$; $3A+C=4$; de donde $A=3$, $C=-5$

$\frac{3}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{-5}{1-2x} + \frac{2}{(1-2x)^2}$ cuyo coeficiente de x^n es

$a_n = 3 + \binom{n+1}{n} - 5.2^n + 2\binom{n+1}{n}2^n = n+4+2^n(2n-3)$ para $n\geq 0$