Ejercicios Tema 1. Lógica y Álgebras de Boole

1. Sean p, q y r los enunciados
   p: Tienes fiebre.
   q: Suspendes el examen final.
   r: Apruebas el curso.
   Expresa cada una de las fórmulas siguientes en lenguaje natural.

   i) $p \to q$.
   ii) $\neg q \leftrightarrow r$
   iii) $q \to \neg r$
   iv) $p \vee q \vee r$
   v) $(p \to \neg r) \vee (q \to \neg r)$
   vi) $(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)$

2. Sean p, q y r las proposiciones siguientes:
   p: Tienes un 10 en el examen final de Matemáticas.
   q: Haces todas las prácticas de laboratorio.
   r: La calificación final de Matemáticas es 10.
   Expresa los enunciados siguientes usando p, q y r y conectivas lógicas.

   i) Tienes un 10 en el examen final de Matemáticas, pero no haces todas las prácticas.
   ii) Para que la calificación final sea un 10 es necesario que la nota del examen final sea también 10.
   iii) Tendrás un 10 en esta asignatura si, y sólo si, haces todas las prácticas o tu nota del examen final es 10.
   iv) Tener un 10 en el examen final y realizar todas las prácticas es condición suficiente para que la calificación final de Matemáticas sea 10.
   v) Para que la calificación final sea 10 es necesario, pero no suficiente, hacer todas las prácticas y obtener un 10 en el examen final.

3. Expresa cada uno de los enunciados siguientes de la forma "si p, entonces q".

   i) Nieva siempre que sopla el viento del norte.
   ii) Los manzanos florecen si hace calor más de una semana.
   iii) Es necesario caminar 15 Km para llegar a la cima del monte.
   iv) Para aprobar álgebra es suficiente estudiar.
   v) La garantía es válida sólo si has comprado el ordenador hace menos de un año.
   vi) Si llueve necesitas un paraguas.
   vii) Viento del sur implica deshielo en primavera.

4. Sabiendo que el valor de la proposición $p \to q$ es falso, determina el valor de $(\neg p \vee \neg q) \to q$. Sabiendo que el valor de la proposición $p \to q$ es verdadero, ¿se puede determinar el valor de $\neg p \vee (p \leftrightarrow q)$? En caso afirmativo, determina dicho valor.

5. Construye la tabla de verdad para cada una de las proposiciones compuestas siguientes. Indica cuáles de ellas son tautologías.

   i) $\neg(p \vee \neg q) \to \neg p$
   ii) $(p \to q) \to (q \to p)$
   iii) $q \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
   iv) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$

6. Sean p, q y r proposiciones primitivas. Verifica las equivalencias lógicas siguientes:

i) $p \to (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to r)$

ii) $[p \to (q \vee r)] \Leftrightarrow [\neg r \to (p \to q)]$

iii) $[(p \vee q) \to r] \Leftrightarrow [(p \to r) \wedge (q \to r)]$

iv) $[p \to (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \to r]$

7. Utilizando tablas semánticas (árboles):

   i) determina si es o no consistente el siguiente conjunto de fórmulas:
   $\{p \to q, (q \vee \neg p) \to r, \neg(r \vee p)\}$,

   ii) encuentra los modelos, si existen, para el siguiente conjunto de fórmulas:
   $\{r \wedge t \to \neg p, \neg p \to q, t \vee \neg q, r\}$,

   iii) demuestra si el argumento siguiente es verdadero:
   $\{(p \to q) \wedge (r \to s), (q \wedge s) \to t, \neg t\} \Rightarrow \neg p \vee \neg r$.

8. Para el universo de todos los profesores y alumnos de un centro, se consideran los siguientes predicados:
   $S(x):$ x es estudiante;
   $F(x):$ x es un profesor;
   $A(x,y):$ x ha hecho alguna pregunta a y;

   i) Escribe los siguientes enunciados en forma simbólica:

      a. Todos los estudiantes han hecho alguna pregunta al profesor Fernández.
      b. Todos los profesores han hecho alguna pregunta a la profesora Rodríguez o han sido preguntados por la misma profesora.
      c. Hay un profesor al que ningún estudiante ha hecho nunca una pregunta.
      d. Hay estudiante que ha hecho alguna pregunta a cada uno de los profesores.
      e. Cada estudiante ha sido preguntado al menos por un profesor.

   ii) Escribe la negación de las proposiciones anteriores en forma simbólica y en lenguaje natural.

9. Decide si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Cuando sea verdadera, escribe su negación. Cuando sea falsa, justifica la respuesta. Las variables x e y toman valores enteros

   i) $\forall x\ \exists y\ xy = 1$

   ii) $\forall x\ \forall y\ xy = 1$

   iii) $\exists x\ \exists y\ x + 2y = 0$

   iv) $\exists x\ \forall y\ x + 2y = 0$

10. Utilizando las propiedades del Álgebra de Boole, simplifica las siguientes funciones booleanas:

   (a) $f(a,b,c) = (a \cdot 0) \cdot (b + b) + \big(b + \overline{b}\big) \cdot (a \cdot a) + (b + 1) \cdot (c \cdot \overline{c})$

   (b) $f(a,b,c) = \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} + b \cdot c \cdot (\overline{c} + 1) + a \cdot b \cdot \overline{c} \cdot (a + \overline{a})$

   (c) $f(a,b,c) = \big(a \cdot \overline{b} + \overline{b} \cdot c\big) \cdot c \cdot \big(\overline{c} + \overline{b} \cdot c\big) + b \cdot \overline{b} + \overline{a \cdot b}$

   (d) $f(a,b,c,d) = \overline{[\overline{a} \cdot \overline{c} + (b + \overline{c})] \cdot d}$

   Para las funciones obtenidas en los apartados (iii) y (iv) calcula su tabla de valores.

11. Obtener la expresión de la función booleana indicada en cada una de las tablas siguientes en sus dos formas canónicas:

a	b	c	f_1
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

a	b	c	d	f_2
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

a	b	c	d	f_3
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

12. Obtener la ecuación simplificada de la función booleana definida por la tabla siguiente, partiendo de la forma de maxterms

a	b	c	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

13. Transformar cada una de las funciones f_1 y f_2 en sus formas canónicas de minterms y f_3 en su forma canónica de maxterms, :

    i) $f_1(a,b,c) = a \cdot \overline{b} + a \cdot c + b \cdot \overline{c}$

    ii) $f_2(a,b,c) = \overline{a} + \overline{(b \cdot \overline{c})}$

    iii) $f_3(a,b,c) = \overline{a} \cdot \overline{(\overline{b} \cdot \overline{c})} \cdot \left(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}\right)$

14. Representa en un mapa de Karnaugh cada una de las siguientes funciones booleanas y simplificalas:

    i) $f_1(a,b) = \overline{a} \cdot b + \overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot \overline{b}$

    ii) $f_2(a,b) = \left(\overline{a} + \overline{b}\right) \cdot (\overline{a} + b) \cdot (a + b)$

    iii) $f_3(a,b,c) = a \cdot b + a \cdot c + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$

15. Simplifica cada una de las siguientes funciones empleando diagramas de Karnaugh:

    i) $f_1(a,b,c,d) = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} + \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot d + \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} \cdot d +$
    $+ a \cdot b \cdot \overline{c} \cdot d + \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c \cdot d + \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c \cdot \overline{d} + a \cdot \overline{b} \cdot c \cdot \overline{d}$

    ii) $f_2(a,b,c,d) = \left(\overline{a} + \overline{b} + c + d\right) \cdot \left(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + d\right) \cdot (b + d)$

16. Realiza la minimización de la función f_1 como suma de términos producto y la de la función f_2 como producto de términos suma mediante mapas de Karnaugh. Dando todas las posibilidades mínimas. Como siempre, la variable a es la de más peso.

    i) $f_1(a,b,c,d) = \sum m(0,2,7,9,11) + \sum d(1,3,5,6,8,14)$

    ii) $f_2(a,b,c,d) = \sum m(0,10,13,14) + \sum d(2,4,9)$