Ejercicios Tema 2. Conjuntos, aplicaciones y grafos

1. Describe los siguientes conjuntos dando una lista de sus elementos:

   (a) El conjunto de los enteros no negativos tales que su doble es menor que 11.

   (b) $B = \{x \text{ tales que } x \in \mathbb{Z} \text{ y } x^2 < 12\}$.

   (c) $C = \{$cadenas de longitud menor o igual que 2 formadas con el alfabeto $\{0, 1\}\}$.

   (d) El conjunto de soluciones reales x de la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

2. Consideremos el alfabeto $A = \{0, 1\}$ y los conjuntos $B = \{01, 110, 011, 0\}$ y

   $$C = \{\text{cadenas de longitud menor o igual que tres formadas con el alfabeto } A\}.$$

   Indica si es verdadera o falsa cada una de las afirmaciones siguientes:

   a) $B = C$ b) $0 \in B$ c) $\{01\} \subseteq B$ d) $1 \in B$ e) $\emptyset \subseteq B$ f) $\emptyset \in B$

3. Completa cada apartado escribiendo $\in$ ó $\subseteq$ en lugar de $\Box$

   (a) $\{2\} \Box \{1, 2, 3\}$

   (b) $2 \Box \{1, 2, 3\}$

   (c) $\mathbb{N} \Box \mathbb{Z}$

   (d) $\{2\} \Box \mathbb{Z}$

   (e) $\{2\} \Box \mathbf{P}(\mathbb{Z})$

   (f) $\{2\} \Box \{1, 2, \{1\}, \{2\}\}$

   (g) $\{2\} \Box \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

   (h) $\emptyset \Box \{1, 2, 3\}$

4. (a) Encuentra un contraejemplo de la afirmación siguiente:

   $$\text{Si } A \cap C = B \cap C, \text{ entonces } A = B.$$

   (b) Demuestra que si $(A \cap C) \subseteq (B \cap C)$ y $(A \cap C') \subseteq (B \cap C')$, entonces $A \subseteq B$.

5. Prueba las siguientes afirmaciones:

   (a) $P \cup (P \cap Q) = P$

   (b) $P \cup Q = P \Leftrightarrow Q \subseteq P$

   (c) $P \cap Q = P \cup Q \Leftrightarrow P = Q$

6. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathbf{R}$ la relación definida para a, $b \in A$ por:

   $$at\mathbf{R}b \text{ si y sólo si } a < b + 2.$$

   (a) Escribe los pares que forman la relación $\mathbf{R}$ y estudia sus propiedades.

   (b) Calcula la relación recíproca $\mathbf{R}^{-1} = \{(a, b) \text{ tales que } (b, a) \in \mathbf{R}\}$.

   (c) Calcula su relación complementaria:
   $\mathbf{R}^c = \{(a, b) \text{ tales que } (a, b) \notin \mathbf{R}\}$.

7. Estudia las siguientes relaciones binarias definidas en el conjunto $\mathbb{Z}$:

   (a) $x\ \mathbf{R}\ y \Leftrightarrow xy > 0$. (b) $x\ \mathbf{R}\ y \Leftrightarrow xy \geq 0$.

8. Sean A el conjunto de los enteros positivos divisores de 48 y $\mathbf{R}$ la relación en A:

$$a\mathbf{R}b \Leftrightarrow b \text{ es un múltiplo de } a.$$

   (a) Representar el diagrama de Hasse de $\mathbf{R}$ en A.
   (b) Halla los elementos destacados de B en los siguientes casos:
      i. $B = \{2, 4, 6, 12\}$,
      ii. $B = \{3, 6, 8, 16\}$.

9. Sea $\mathbf{R}$ la relación en el conjunto $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, definida por

$$(x, y)\mathbf{R}(z, t) \text{ si, y sólo si, } x + t = y + z.$$

   (a) Prueba que es una relación de equivalencia y
   (b) Calcula la clase de equivalencia de $(0, 0)$.

10. Prueba que la siguiente relación $\mathbf{R}$ definida en $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ es de equivalencia y calcula las clases de equivalencia

$$\mathbf{R} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 4), (3, 2), (5, 5)\}.$$

11. Considera $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 30, 60\}$ y la relación

$$x\mathbf{R}y \Leftrightarrow \text{ x es divisor de y.}$$

   (a) Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto A para la relación $\mathbf{R}$.
   (b) Halla los elementos maximales, minimales y cotas de $B = \{3, 4, 5, 6, 30\}$ en A.

12. Halla los elementos destacados de B en los siguientes casos:

   (a) $B = \{2, 4, 6, 12\}$, (b) $B = \{3, 6, 8, 16\}$.

13. Sea $A = \{001, 111, 010, 011, 000, 100\}$. Representa el diagrama de Hasse correspondiente a la relación de orden $\mathbf{R}$ en los siguientes casos:

   (a) $\mathbf{R}$ es el orden lexicográfico de las cadenas de bits basado en el orden $0 < 1$. Es decir,

$$abc\,\mathbf{R}\,def \Leftrightarrow a < b \text{ ó } (a = d \text{ y } b < e) \text{ ó}$$
$$(a = d \text{ y } b = e \text{ y } c < f) \text{ ó } (a = d \text{ y } b = e \text{ y } c = f).$$

   (b) $\mathbf{R}$ es el orden dado por $abc\mathbf{R}def$ si y sólo si $a \leq d$ y $b \leq e$ y $c \leq f$.

14. Sea X un conjunto no vacío, $(\mathbb{N}, \leq)$ el conjunto de los números naturales con el orden usual y $f : X \to \mathbb{N}$ una aplicación. Se define en X la realción $x\mathbf{R}y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$. Demuestra que :

   (a) la relación $\mathbf{R}$ no es necesariamente una relación de orden.
   (b) $\mathbf{R}$ es una relación de orden si la aplicación f es inyectiva.

15. Determina si la aplicación $f : A \to A$ es inyectiva y/o sobreyectiva para $A = \mathbb{Z}$:

    (a) $f(x) = x + 7$
    (b) $f(x) = 2x - 3$
    (c) $f(x) = -x^2 + x$
    (d) $f(x) = x^3$

    Estudia los mismos casos para $A = \mathbb{R}$.

16. Sea $f : \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$ la aplicación definida por $f = \{(a, b), (b, a), (c, b)\}$.

    (a) Escribe $f \circ f$ y $f \circ f \circ f$ como conjunto de pares ordenados.
    (b) Calcula f^9 y f^{623}.

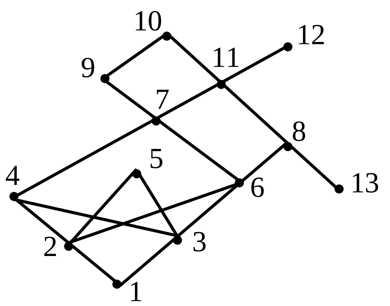
17. Si la matriz de adyacencia del grafo G es $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

    (a) Qué vértices tienen grado 3?
    (b) Qué vértices tienen grado par?

18. Consideremos G el grafo con matriz de adyacencia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

    (a) Calcula los caminos de longitud 3 desde v_1 a v_2.
    (b) Justifica si G es o no conexo.

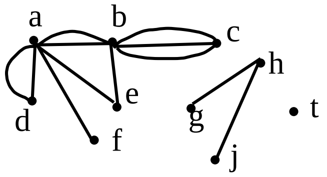
19. La figura representa el diagrama de Hasse para un conjunto parcialmente ordenado A.



    Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, para $B = \{4, 5, 6, 7, 8\} \subseteq A$,

    (a) 7 es maximal de B y 12 es cota superior de B en A.
    (b) 5 es maximal de B y 1 un mínimo de A.
    (c) 5 es minimal de B y 10 maximal de A.
    (d) 1 es cota inferior de B en A y 1 es un mínimo de A.

20. Consideremos el grafo G :



(a) Seleciona los caminos y los circuitos entre las siguientes listas de vértices:

i. $aebcb$

ii. $ebac$

iii. $cbeaed$

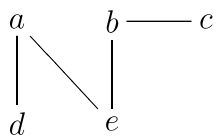
iv. ghg

(b) Calcula los grados de los vértices

(c) Calcula la matriz de adyacencia de G.

(d) Calcula las componentes conexas de G.

(e) Justifica que H :



es un subgrafo de G y que además es un árbol.

(f) Da ejemplos de subgrafos de G que sean circuitos.