

Ejercicios Tema 4. Combinatoria

1. Un número telefónico consta de siete cifras enteras. Supongamos que la primera cifra debe ser un número entre 2 y 9, ambos inclusive. La segunda y la tercera cifra deben ser números entre 1 y 9, ambos inclusive. Cada una de las restantes cifras es un número entre 0 y 9, ambos inclusive. ¿Cuántos números de teléfono distintos pueden formarse con estas condiciones?
2. Una empresa produce cerraduras de combinación. Cada combinación consta de tres números enteros del 0 al 99, ambos inclusive. Por el proceso de construcción de las cerraduras cada número no puede aparecer más de una sola vez en la combinación de la cerradura. ¿Cuántas cerraduras diferentes pueden construirse?
3. Existen cuatro líneas de autobuses entre los puntos A y B y tres líneas entre los puntos B y C. Halla el número de formas en que una persona puede viajar en autobús: *a)* desde A hasta C, pasando por B, *b)* desde A hasta C y vuelta, pasando por B, *c)* desde A hasta C y vuelta, pasando por B si no se quiere utilizar una línea más de una vez.
4. Calcula el número de palabras de cinco letras distintas que se pueden formar con las veintisiete letras del alfabeto que contengan tres consonantes y dos vocales.
5. Un pianista ha ensayado durante 112 horas a lo largo de doce días (cada día un número entero de horas). Demostrar que hubo un par de días consecutivos en los que ensayó al menos 19 horas.
6. Sea un conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_9\}$ de números naturales diferentes cuya suma es noventa. Demuestra que existen en este conjunto cuatro números cuya suma es al menos cuarenta.
7. Los números naturales del 1 al 50 se colocan aleatoriamente en una tabla de cinco filas y diez columnas. Justifica que el producto de los elementos de alguna de las cinco filas es múltiplo de 81. Calcula el número de colocaciones que verifican que el primer elemento de cada fila es menor que los restantes elementos de dicha fila.
8. Un compartimento de tren tiene doce asientos, seis de cara a la locomotora y otros seis de espaldas a la misma. De doce pasajeros, cinco prefieren sentarse de cara a la locomotora, cuatro prefieren sentarse de espaldas y los otros tres no tienen preferencia. ¿De cuántas formas se pueden sentar los pasajeros respetando sus preferencias?
9. Una casa para estudiantes está supervisada por la señora Morales. La casa tiene cinco pisos, cada uno de ellos está dividido en cuatro habitaciones. El próximo curso tendrá veinte estudiantes, uno para cada una de las habitaciones. Entre los veinte estudiantes habrá cuatro de tercer curso (Daniel, Fernando, Hugo y Antonio) y los otros dieciséis estudiantes serán de primer curso. ¿De cuántas formas puede asignar la señora Morales las habitaciones a los veinte estudiantes si Daniel y Fernando deben estar en el mismo piso?
10. Una mano de bridge consta de trece cartas del conjunto de 52 de la baraja francesa.
 - a)* ¿Cuántas manos de bridge son posibles?

b) ¿De cuántas formas se le puede dar a una persona seis picas y cinco corazones?

11. Un profesor del Departamento de Computación tiene siete libros de programación diferentes en una estantería. Tres de los libros son de FORTRAN y los otros cuatro de PASCAL. ¿De cuántas formas puede ordenar el profesor estos libros si:

- a) no hay restricciones?
- b) los lenguajes se deben alternar?
- c) todos los libros de FORTRAN deben estar juntos?
- d) todos los libros de FORTRAN deben estar juntos y los libros de PASCAL también?

12. ¿De cuántas formas puede sacar un jugador cinco naipes de una baraja francesa y obtener un full (trío más pareja)? ¿y dobles parejas?

13. ¿Cuántas permutaciones de las letras de la palabra MISSISSIPPI no contienen dos o más letras I consecutivas?

14. ¿De cuántas formas se pueden colocar las letras de la palabras POLIINSATURADO de modo que se mantenga el orden en que aparecen las vocales?

15. En un estante hay doce libros distintos. ¿De cuántas formas se pueden escoger cinco de esos libros de modo que no elijamos dos (o más) consecutivos?

16. ¿Cuántos números enteros entre 1000 y 9999 satisfacen que la suma de sus dígitos es exactamente 9? ¿Cuántos de los números anteriores tienen todas sus cifras diferentes de cero?

17. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir doce libros distintos entre cuatro niños de modo que:

- a) cada niño reciba tres libros?
- b) los dos niños mayores reciban cuatro libros y los dos menores dos cada uno?
- c) dos niños reciban cuatro libros y los otros dos, dos cada uno?

18. Queremos apostar en las quinielas (catorce partidos, tres posibles resultados: 1, X, 2). Calcula el número mínimo de apuestas que debemos rellenar para asegurarnos el acierto en cada uno de los siguientes casos:

- a) se sabe que no saldrán símbolos iguales consecutivos,
- b) se sabe que habrá exactamente seis "2",
- c) se sabe que habrá ocho "1", cuatro "X" y dos "2".

19. Desarrolla y simplifica

a) $(x + y)^7$ b) $(2x + 3y^2)^5$ c) $(2x - y)^4$ d) $(2x - y^2)^5$

20. Determínese el coeficiente de x^9y^3 en:

a) $(x + y)^{12}$ b) $(x + 2y)^{12}$ c) $(2x + 3y)^{12}$.

21. Determínese el coeficiente de

a) xyz^2 en $(x + y + z)^4$ b) xyz^2 en $(2x - y - z)^4$ c) xy en $(x - 2y + 3x^{-1})^4$.



22. Determinése la suma de todos los coeficientes de

a) $(x + y)^{10}$ b) $(2s - 3t + 5u + 6v - 11w + 3x + 2y)^{10}$.

23. Resuelve las cuestiones siguientes

- a) ¿De cuántas formas pueden distribuirse cinco dulces diferentes entre diez personas si ninguna de ellas puede recibir más de uno?
- b) ¿De cuántas formas pueden distribuirse cinco dulces idénticos entre diez personas si cualquiera de ellas puede recibir cualquier número de dulces?
- c) ¿De cuántas formas pueden distribuirse cinco dulces idénticos entre diez personas si ninguna de ellas puede recibir más de uno?
- d) ¿De cuántas formas pueden distribuirse cinco dulces diferentes entre diez personas si cualquiera de ellas puede recibir cualquier número de dulces?

24. A través de un canal de comunicación se va a transmitir un mensaje formado por once letras distintas. Además de estas once letras, el transmisor enviará un total de 48 espacios en blanco entre las letras, con cuatro espacios como mínimo entre cada par de letras consecutivas. ¿Cuántos posibles mensajes se pueden enviar si deben empezar y terminar con una letra y el orden de las letras es significativo?

25. Determina las formas diferentes en que se pueden elegir veinte monedas de cuatro grandes recipientes que contienen monedas de diferente denominación. Cada recipiente contiene un solo tipo de monedas.

26. ¿De cuántas formas se pueden colocar veinticuatro libros diferentes en cuatro estantes de modo que haya al menos un libro en cada repisa? Para cualquiera de estas disposiciones, considera que en cada repisa los libros deben estar colocados uno junto al otro y el primer libro a la izquierda.

27. Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ señala cuántas aplicaciones $f : A \rightarrow A$ verifican simultáneamente: $f^{-1}(\{1, 2, 3\}) = \emptyset$, $f^{-1}(\{4, 5\}) = \{1, 3, 7\}$, $f^{-1}(\{8, 14\}) = \{8, 14\}$, $f^{-1}(\{11\}) = \{4, 5\}$.

28. ¿De cuántas formas se pueden colocar doce canicas del mismo tamaño en cinco recipientes distintos si: a) todas las canicas son negras? b) cada canica es de distinto color?

29. ¿Cuántos números naturales de cuatro cifras significativas tienen sus cuatro dígitos diferentes en orden estrictamente creciente (como 1347 y 3689) o en orden estrictamente decreciente (como 6432 y 9531)? ¿Cuántos números naturales de cuatro cifras significativas tienen sus cuatro dígitos en orden creciente (como 3467, 2256 y 4777) o decreciente (como 7532, 9966 y 5552)?

30. ¿De cuántas formas se pueden seleccionar nueve bolas de una bolsa que contiene tres bolas rojas, tres verdes, tres azules y tres blancas?

31. ¿Cuántos números de la seguridad social (secuencias de nueve dígitos) tienen al menos una vez cada uno de los dígitos 1, 3 y 7?



32. Si se lanza un dado cinco veces, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las cinco tiradas sea veinte?
33. ¿De cuántas formas se pueden colocar todas las letras de la palabra INFORMACION de tal manera que ningún par de letras consecutivas aparezcan más de una vez? Queremos contar disposiciones como IINNOOFRMCA y FORCMAIINON pero no INFORINMOCA (donde “IN” aparece dos veces) o NORCFNOIAMI (donde “NO” aparece dos veces).
34. Determina el número de soluciones enteras para $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ donde $-5 \leq x_i \leq 10$ para todo i , $1 \leq i \leq 4$.
35. En un departamento se han de asignar siete asignaturas diferentes a cinco profesores, cada profesor puede impartir cualquier asignatura. ¿De cuántas formas se puede efectuar el reparto si cada profesor debe impartir al menos una asignatura?
36. En un grupo de prácticas formado por cinco alumnos, cada estudiante debe presentar al profesor una propuesta de proyecto. Tras estudiarlos, el profesor asignará a cada estudiante un proyecto. Los cinco proyectos han de ser distintos, pero es posible que un mismo proyecto sea asignado a más de un estudiante. ¿De cuántas formas posibles puede realizar la asignación de modo que ningún estudiante reciba el mismo proyecto que propuso?

Ejercicios Complementarios

Resuelve el ejercicio 4 si *a)* las palabras deben contener la letra B, *b)* las palabras deben contener las letras B y C, *c)* las palabras deben empezar con la letra B y terminar con la letra C, *d)* las palabras deben contener las letras A y B, *e)* las palabras deben empezar con la letra A y terminar con la letra B, *f)* las palabras deben contener las letras A, B y C, *g)* las palabras deben contener las letras A, B, C, D y E, *h)* las palabras deben contener las letras A, E y I.

2. Calcula el número de diagonales que tiene un polígono regular de n lados. ¿Cuál es el polígono que tiene el doble de diagonales que de lados?
3. Calcula el número de triángulos que se pueden formar con los vértices de un polígono regular de n lados. De ellos, calcula cuántos no tienen por lado una arista del polígono.
4. Calcula el número de secuencias de longitud diez que se pueden formar con cuatro letras A, cuatro letras B, cuatro letras C y cuatro letras D con la condición de que cada letra debe aparecer, al menos, dos veces.
5. Sea A el conjunto de los números naturales del 1 al 100, calcula de cuántas formas se pueden seleccionar dos subconjuntos de diez números cada uno, A_1 y A_2 , de forma que el mayor elemento de A_1 sea más pequeño que el menor elemento de A_2 .
6. Calcula el número de formas de colocar veinticinco banderas en diez mástiles numerados si el orden de las banderas en cada mástil: *a)* no es significativo, *b)* sí es significativo, *c)* sí es significativo y en cada mástil ondea al menos una bandera.
7. Calcular el número de permutaciones de $\{1, 2, \dots, 7\}$ para las cuales son fijos tres números.

