Capítulo 2

Conjuntos, relaciones y grafos

2.1. Conjuntos

Se partirá de la noción intuitiva de objeto y de unos entes matemáticos que se denominarán *conjuntos*.

Definición 12. *Un* ***conjunto*** *es una colección de objetos bien definidos y diferenciables entre sí. A los objetos que constituyen un conjunto se les denomina* ***elementos*** *del mismo.*

Los conjuntos se designan, habitualmente, por letras latinas mayúsculas: $A, B, \ldots$ y los elementos por letras latinas minúsculas: $a, b, \ldots$; si a es un elemento del conjunto A, se dirá que *a pertenece* al conjunto A, y se escribirá $a \in A$. En caso contrario, se dirá que el elemento *no pertenece* al conjunto y se denotará $a \notin A$.

Un conjunto A está *bien definido* cuando, dado un objetoo cualquiera x, es cierta una y sólo una, de las proposiciones $x \in A$ y $x \notin A$.

Al conjunto que carece de elementos se le denomina **conjunto vacío**, y se denota por $\emptyset$ o por $\{\ \}$.

Ejemplo 18. *La proposición "Todos los alumnos que aprobarán Matemáticas en junio" no define adecuadamente un conjunto puesto que, dado un alumno, no se puede afirmar de antemano si aprobará o no en junio.*

Un conjunto puede ser definido por *extensión*, enumerando todos y cada uno de sus elementos, o por *compresión*, diciendo cuál es la propiedad que los caracteriza.

Ejemplo 19. *Algunos conjuntos definidos por* comprensión*:*

- $A = \{x \in \mathbb{Z}\,;\, x^2 \leq 16\}$

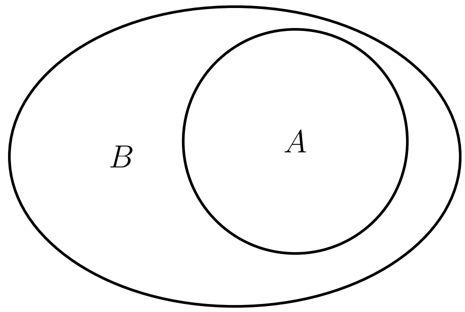


Figura 2.1: Inclusión de Conjuntos, $A \subset B$.

- $B = \{x \in \mathbb{N}\,;\ x\ \textit{divide a}\ 20\}$
- $\emptyset = \{\ \}$

Ejemplo 20. *Los mismos conjuntos definidos por* extensión*:*

- $A = \{0, 1, 2, 3, 4, -1, -2, -3, -4\}$
- $B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

Como se aprecia en este ejemplo, se utilizan las llaves "{" y "}" para delimitar los elementos que componen un conjunto.

2.1.1. Inclusión

Definición 13. *Dados dos conjuntos A y B, se dice que A es un* ***subconjunto*** *de B, y se expresa $A \subseteq B$, cuando todos los elementos de A son también elementos de B, es decir:*

$$\forall x\ [x \in A \Longrightarrow x \in B]$$

se dirá que A está *incluído* o *contenido* en B. Cuando A no está contenido en B, se escribirá $A \nsubseteq B$ (lo cual quiere decir que existe $a \in A$ tal que $a \notin B$).

Cualquier conjunto A, siempre admite como subconjuntos al conjunto vacío $\emptyset$ y al propio conjunto A. Estos se denominan *subconjuntos impropios o triviales*. En otro caso, se dice que B es un subconjunto *propio* de A.

Si $B \subseteq A$ y $B \neq A$, se dice que B está contenido estrictamente en A y se denota $B \subset A$.

En la figura 2.1 se muestra, mediante *Diagramas de Venn*, un conjunto A subconjunto de otro B.

Definición 14. *El conjunto formado por todos los subconjuntos de uno dado A se denomina* ***partes de*** *A y se denota $\mathcal{P}(A)$.*

Si A y B son dos conjuntos cualesquiera, se verifica que

$$B \in \mathcal{P}(A) \;\Leftrightarrow\; B \subseteq A$$

Ejemplo 21. *Si* $A = \{a, b\} \;\Rightarrow\; \mathcal{P}(A) = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\Big\}$.

Si $A = \{a, b, c\} \;\Rightarrow\; \mathcal{P}(A) = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\Big\}$.

Ejemplo 22. *Las afirmaciones* $I), III), IV), V), VIII), IX)$ *y* $XI)$ *son verdaderas.*

I) $\emptyset \subseteq \emptyset$.

II) $\emptyset \in \emptyset$

III) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

IV) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

V) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

VI) $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

VII) $\{a, \emptyset\} \subseteq \{a, \{a, \emptyset\}\}$

VIII) $\{a, \emptyset\} \in \{a, \{a, \emptyset\}\}$

IX) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

X) $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$

XI) $\{2\} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$

XII) $\{2\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z})$

Definición 15. *Un conjunto* A *es* ***finito*** *si tiene un número* $n \in \mathbb{N}$ *de elementos; este número se llama* ***cardinal*** *y se denota* $|A|$ *o* $\#A$*. En caso contrario, se dice que* A *es no finito.*

Si A es un conjunto finito, tambien lo es $\mathcal{P}(A)$.

Ejemplo 23. $A = \{a, b, c\}$ *es un conjunto finito con* $|A| = 3$*. El conjunto* $\mathcal{P}(A) = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\Big\}$ *es finito y su cardinal es 8.* $B = \{n \in \mathbb{N},\ n \text{ es par}\}$ *no es finito.*

Definición 16. *Dos conjuntos* A *y* B *son* ***iguales*** *si, simultáneamente, se verifica* $A \subseteq B$ *y* $B \subseteq A$*, es decir:*

$$A = B \;\Leftrightarrow\; A \subseteq B \;\wedge\; B \subseteq A$$

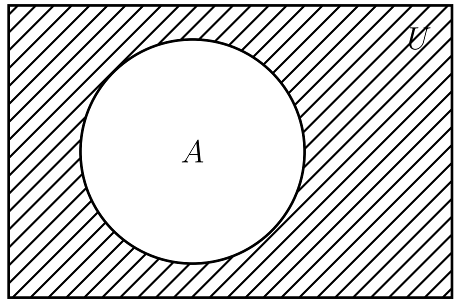


Figura 2.2: Complementario de A respecto a U.

2.2. Operaciones entre conjuntos

2.2.1. Complementación

Cuando, en un contexto determinado, se consideran siempre conjuntos que son subconjuntos de uno dado U, a dicho conjunto de referencia U se le denomina **conjunto universal o universo**.

Definición 17. *Dado un conjunto U y un subconjunto $A \subseteq U$ se llama **complementario** del conjunto A, y se denota $\bar{A}$, al subconjunto de U formado por todos los elementos que no pertenecen a A, es decir:*

$$\bar{A} = \{x \in U \,;\, x \notin A\}$$

Obsérvese que la propiedad que determina al complementario de A es la negación de la propiedad que determina a los elementos de A.

En la figura 2.2 se muestra, en la zona rayada, el conjunto complementario de A respecto a U.

Propiedades 1. *Dado un conjunto U y dos subconjuntos suyos A y B, se verifican las siguientes propiedades:*

I) $\bar{\emptyset} = U$.

II) $\bar{U} = \emptyset$.

III) $\bar{\bar{A}} = A$.

IV) $A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; \bar{B} \subseteq \bar{A}$.

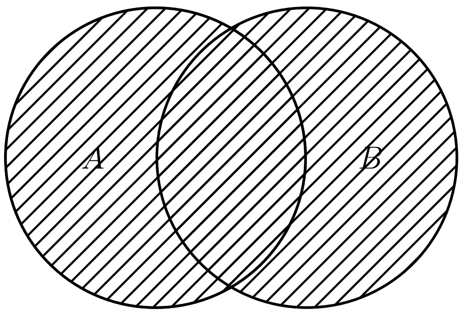


Figura 2.3: Unión de conjuntos: $A \cup B$.

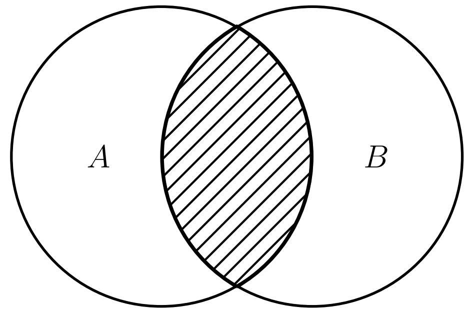


Figura 2.4: Intersección de conjuntos: $A \cap B$.

2.2.2. Unión

Definición 18. *Dados dos conjuntos A y B se llama* ***unión*** *de A y B, y se representa $A \cup B$, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o a B:*

$$A \cup B = \{x\,;\, x \in A \ \vee \ x \in B\}$$

En la figura 2.3, la zona rayada reprsenta el conjunto $A \cup B$.

Ejemplo 24. *Dados $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{m, s\}$ tenemos $A \cup B = \{a, b, c, m, s\}$.*

Propiedades 2. *Dados los conjuntos A, B y C, subconjuntos de U, la unión de conjuntos verifica las siguientes propiedades:*

i) $A \subseteq (A \cup B)$, $\quad B \subseteq (A \cup B)$.

ii) $A \subseteq B \ \Leftrightarrow \ A \cup B = B$.

iii) $A \subseteq C \ \wedge \ B \subseteq C \ \Leftrightarrow \ (A \cup B) \subseteq C$.

iv) $A \cup A = A$ *(Propiedad Idempotente).*

v) $A \cup B = B \cup A$ *(Propiedad Conmutativa).*

vi) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(Propiedad Asociativa).*

vii) $A \cup U = U$

viii) $A \cup \emptyset = A$.

2.2.3. Intersección

Definición 19. *Dados dos conjuntos A y B se llama **intersección** de A y B, y se representa $A \cap B$, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y a B, es decir:*

$$A \cap B = \{x\,;\, x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$

De la definición se sigue que un elemento pertenece a la intersección si pertenece a los dos conjuntos. En la figura 2.4 on the previous page la zona rayada indica el conjunto intersección $A \cap B$.

Ejemplo 25. *1. Dados $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{m, s\}$ tenemos $A \cap B = \emptyset$.*

2. Sean $A = \{a, x\}$, $B = \{b, x\}$ y $C = \{x, y\}$. $A \cap B = \{x\} \subseteq C$ y, sin embargo, $A \nsubseteq C$ y $B \nsubseteq C$.

3. Dados $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{m, a, s, t\}$ tenemos $A \cap B = \{a\}$.

Propiedades 3. *Dados tres conjuntos A,B y C, subconjuntos de U, la intersección verifica las siguientes propiedades:*

i) $(A \cap B) \subseteq A, \quad (A \cap B) \subseteq B$.

ii) $A \subseteq B \ \Leftrightarrow \ A \cap B = A$.

iii) $C \subseteq A \ \wedge \ C \subseteq B \ \Leftrightarrow \ C \subseteq (A \cap B)$.

iv) $A \cap A = A$ *(Propiedad Idempotente).*

v) $A \cap B = B \cap A$ *(Propiedad Conmutativa).*

vi) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(Propiedad Asociativa).*

vii) $A \cap U = A$ *(U es el conjunto universal).*

viii) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Propiedades 4. *Con la notación anterior, la unión y la intersección verifican además las siguientes propiedades conjuntas:*

i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(Ver figura 2.5 on the facing page).*

ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *(Ver figura 2.6 on the next page).*

iii) $A \cup \bar{A} = U$.

iv) $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

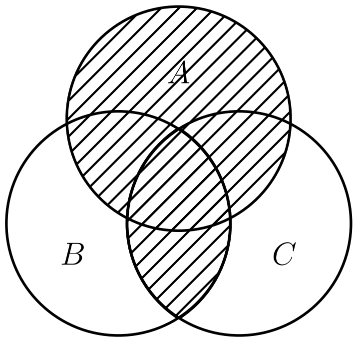


Figura 2.5: $A \cup (B \cap C)$.

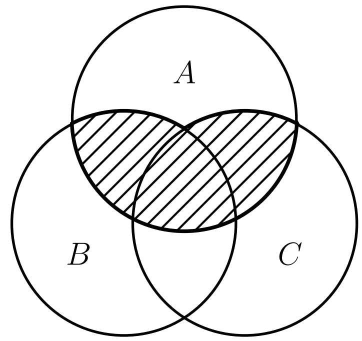


Figura 2.6: $A \cap (B \cup C)$.

v) $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$ *(Primera Ley de De Morgan).*

vi) $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$ *(Segunda Ley de De Morgan).*

Como consecuencia, si $A, B \subseteq U$ son dos subconjuntos de U, se verifica que

$$A = A \cap U = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

Definición 20. *Si dos conjuntos no tienen ningún elemento en común, se dice que son* ***disjuntos****, es decir:*

$$A \text{ y } B \text{ son disjuntos} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

2.2.4. Diferencia

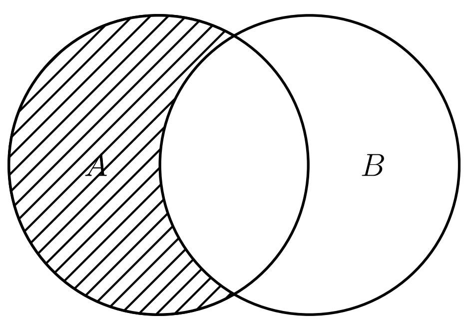


Figura 2.7: Diferencia de conjuntos

Definición 21. *Dados dos conjuntos A y B se llama* ***diferencia*** *entre A y B, y se representa $A \backslash B$ o $A - B$, al conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B:*

$$A \backslash B = \{x \in A \,;\, x \notin B\}$$

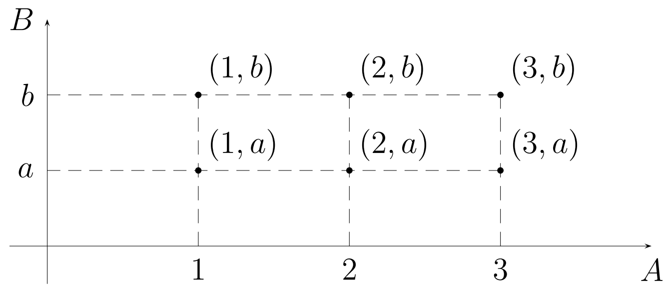


Figura 2.8: Representación gráfica de $A \times B$

En la figura 2.2.4 on the preceding page se muestran dos conjuntos A y B y, representado por el área rayada, el conjunto $A - B$. Se aprecia con facilidad que $A \backslash B$ y $B \backslash A$ son, en general, distintos. Por otro lado, es claro que $A \backslash B = A \cap \bar{B}$

Además, se verifica que

$$A \backslash B = A \;\Leftrightarrow\; A \subseteq \bar{B} \;\Leftrightarrow\; A \cap B = \emptyset \;\Leftrightarrow\; B \subseteq \bar{A} \;\Leftrightarrow\; B \backslash A = B$$

2.2.5. Producto Cartesiano

Definición 22. *Dados dos conjuntos A y B, se llama* ***producto cartesiano*** *de A por B, y se denota $A \times B$, al conjunto constituido por* pares ordenados *de elementos, el primero perteneciente al conjunto A y el segundo al B. Esto es:*

$$A \times B = \{(a, b)\,;\, a \in A \;\wedge\; b \in B\}$$

Ejemplo 26. *El producto cartesiano $A \times B$ de los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$ es el conjunto:*

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

Cuando sea posible, es útil representar gráficamente el producto cartesiano por medio de *diagramas de coordenadas cartesianas*. Para ello se toman dos rectas OX y OY, perpendiculares u oblicuas, de forma que el punto O es la intersección de ambas. Este punto recibe el nombre de *origen*, la recta OX es el eje de *abscisas* y la OY es el eje de *ordenadas*. El conjunto A se representa linealmente en OX, y el B en OY. Los elementos (a, b) de $A \times B$ se representan por puntos resultantes de la intersección de la paralela a OY por a con la paralela a OX por b. En la figura 2.8 se muestra la representación en coordenadas cartesianas del ejemplo anterior.

Dos pares ordenados (a, b) y (c, d), elementos del producto cartesiano $A \times B$, son iguales si $a = c$ y $b = d$. Es claro que, en general, $A \times B \neq B \times A$.

Se puede extender la definición de producto cartesiano a n conjuntos.

Definición 23. *Dados n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se define su producto cartesiano como:*

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n)\ ;\ a_i \in A_i,\ \forall\, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Finalmente, si A y B son conjuntos finitos, tambien lo es $A \times B$ y se tiene que:

$$|A \times B| = |A|.|B|$$

2.3. Relaciones

El concepto de relación está presente en distintas situaciones de nuestra vida cotidiana. Por ejemplo, hay una relación entre el nombre de un alumno, la titulación en la que está matriculado y la nota media de dicho alumno. También, hay una relación que liga una línea aérea, el número de vuelo, el punto de partida, el destino, la hora de salida y la hora de llegada de un vuelo. Estas relaciones involucran elementos de varios conjuntos y son muy utilizadas para representar bases de datos informáticas.

Definición 24. *Si tenemos n conjuntos, A_i con $i = 1, \ldots, n$, se dice que un subconjunto $\mathcal{R} \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$ es una relacion sobre $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Nos centraremos en el caso $n = 2$. Dados dos conjuntos A y B, una **relación binaria** de A en B es un subconjunto cualquiera $\mathcal{R}$ del producto cartesiano $A \times B$.*

Si el par ordenado (a, b) pertenece a $\mathcal{R}$, se dirá que a está relacionado *con b, y se denotará $a\mathcal{R}b$.*

*Dado un conjunto A, se llama **relación** en A a cualquier subconjunto $\mathcal{R}$ de $A \times A$.*

Una relación en A es, por tanto, una relación en la que coinciden el conjunto inicial y el final.

Ejemplo 27. i) *Para los conjuntos A y B del ejemplo 26, se tiene que*

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}.$$

Una posible relación sería $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$.

En la figura 2.9 on the following page se muestran, mediante puntos, los elementos de $A \times B$, y mediante círculos los de $\mathcal{R}$.

ii) *Para el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, serán $A = B = \mathbb{R}$. Una posible relación podría ser $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,;\, x^2 + y^2 = r^2\}$, siendo r un número real positivo.*

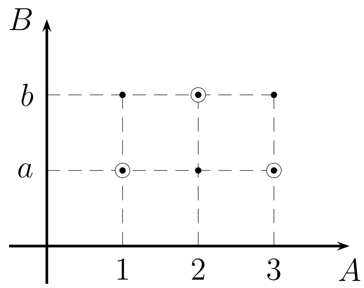


Figura 2.9: Representación gráfica de $\mathcal{R} \subset A \times B$

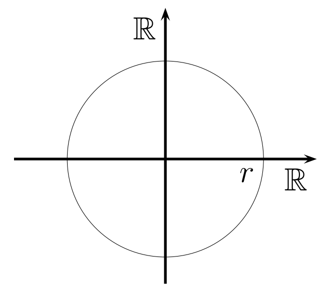


Figura 2.10: Representación gráfica de $\mathcal{C} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

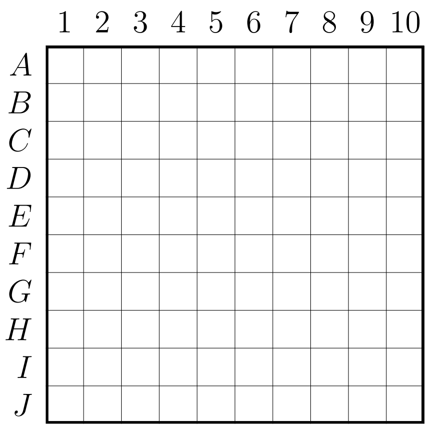


Figura 2.11: Tablero de una partida de barcos: $X \times Y$.

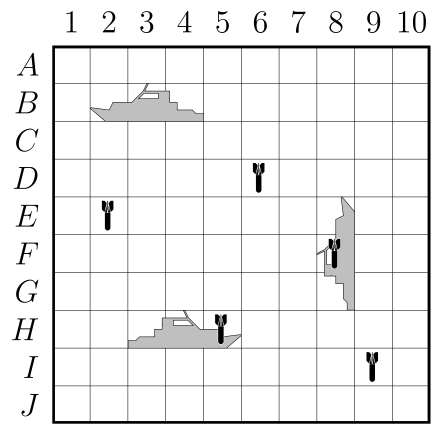


Figura 2.12: Flota de barcos ($\mathcal{F}$) y torpedos disparados ($\mathcal{T}$) en un tablero de barcos ($X \times Y$).

En la figura 2.10 se muestran los conjuntos A y B (los ejes cartesianos), y toda la superficie del papel, en la que se encuentran los ejes, que constituye el producto cartesiano $A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Los elementos de la relación $\mathcal{C}$ serán los puntos de ese plano que verifiquen la ecuación que la caracteriza. En la figura, esos puntos se encuentran sobre la línea fina que, como se aprecia, forma una circunferencia de radio r.

III) *El estado de una partida de un juego de barcos se determina, habitualmente, en un tablero cuadrado de 100 casillas, ordenadas en 10 filas y 10 columnas numeradas respectivamente del 1 al 10 y de la A a la J, tal como se muestra en la figura 2.11. Si llamamos X al conjunto de las filas del tablero e Y al de las columnas, las casillas del tablero serán pares ordenados de la forma $(x, y) \in X \times Y$.*

La situación de la flota de barcos en el tablero bien puede considerarse una relación $\mathcal{F} \subset X \times Y$. En concreto, los barcos que se muestran en el tablero de la figura 2.12 on the preceding page constituyen la relación:

$$\mathcal{F} = \{(B,2), (B,3), (B,4), (E,8), (F,8), (G,8), (H,3), (H,4), (H,5)\}$$

Por otra parte, los sucesivos intentos de hundir la flota, indicados en la figura 2.12 on the facing page mediante torpedos, constituyen otra relación $\mathcal{T}$ de la forma:

$$\mathcal{T} = \{(D,6), (E,2), (F,8), (H,5), (I,9)\}$$

Los impactos que los torpedos han producido en los barcos, serán la relación intersección entre ambas: $\mathcal{I} = \mathcal{F} \cap \mathcal{T} = \{(F,8), (H,5)\}$.

2.3.1. Propiedades de una relación binaria

Sea A un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación binaria en A, Se dice que $\mathcal{R}$ es

I) **Reflexiva** si

$$\forall a \in A \quad a\mathcal{R}a$$

II) **Simétrica** si

$$\forall a_1, a_2 \in A \quad [a_1\mathcal{R}a_2 \Longrightarrow a_2\mathcal{R}a_1]$$

III) **Antisimétrica** si

$$\forall a_1, a_2 \in A \quad [(a_1\mathcal{R}a_2) \wedge (a_2\mathcal{R}a_1) \Longrightarrow a_1 = a_2]$$

IV) **Transitiva** si

$$\forall a_1, a_2, a_3 \in A \quad [(a_1\mathcal{R}a_2) \wedge (a_2\mathcal{R}a_3) \Longrightarrow a_1\mathcal{R}a_3]$$

Ejemplo 28. I) *Dado cualquier conjunto A, la relación ($\subseteq$) "estar contenido en" definida en $\mathcal{P}(A)$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva.*

II) *Si $A = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, la relación ($\leq$) "ser menor o igual que" es también reflexiva, antisimétrica y transitiva.*

III) *Dados dos números enteros a y b, se dice que a* divide a *b y se denota $a|b$, si existe un número entero m tal que $b = am$. Es fácil comprobar que es reflexiva y transitiva. Cuando la restringimos a un subconjunto A de números enteros del mismo signo (es decir $A \subseteq \mathbb{Z}^+$ o $A \subseteq \mathbb{Z}^-$), verifica, además la propiedad antisimétrica.*

2.3.2. Representación mediante grafos dirigidos

Hay varias formas de representar una relación entre conjuntos finitos. Una de ellas es enumerar sus pares ordenados. Hay otra forma importante de representar una relación binaria en A, si el conjunto A es finito, y es con un grafo dirigido. Para ello, se dibujan tantos puntos como elementos tenga A y una flecha de a a b si $(a, b) \in \mathcal{R}$ o, lo que es lo mismo, si $a\mathcal{R}b$. En el grafo se visualizan las distintas propiedades de la relación. Por ejemplo, la relación es reflexiva si, y sólo si, hay un lazo en cada vértice.

Cuando la relación es simétrica, en vez de flechas consideraremos una arista (segmento).

Ejercicio Dibuja el grafo dirigido que representa la relación en $A = \{a, b, c, d, e\}$

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, d), (d, a), (d, b)\}.$$

2.3.3. Relación de Equivalencia

Definición 25. *Una* ***relación de equivalencia*** *en un conjunto A es una relación $\mathcal{R}$ que satisface las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.*

En adelante, utilizaremos el símbolo $\sim$ para referirnos a una relación de equivalencia.

Las relaciones de equivalencia permiten agrupar elementos relacionados entre sí en subconjuntos llamados **clases de equivalencia**:

Definición 26. *Dado un conjunto A dotado de una relación de equivalencia $\sim$, se llama* ***clase de equivalencia*** *del elemento $a \in A$, y se denota por $[a]$, al conjunto de los elementos de A que están relacionados con a mediante $\sim$, es decir:*

$$[a] = \{x \in A\, ; \, x \sim a\}$$

Ejemplo 29. *En $\mathbb{Z}$, la relación:*

$$a \equiv_2 b \Longleftrightarrow a - b \text{ es un múltiplo de } 2$$

es una relación de equivalencia. Esta relación se puede extender, considerando cualquier entero positivo m y definiendo:

$$a \equiv_m b \Longleftrightarrow a - b \text{ es un múltiplo de } m$$

Un número entero x pertenece a la clase de equivalencia $[r]$, con $0 \leq r \leq m - 1$, si r es el resto de la división de x entre m.

La relación de equivalencia del ejemplo $m = 2$ divide a los elementos del conjunto $\mathbb{Z}$ en dos clases de equivalencia:
$A = \{$*los números pares*$\}$ *y la otra* $B = \{$*los números impares*$\}$.

Si la relación es $\equiv_m$*, tenemos* m *clases de equivalencia:* $[0], [1], \ldots, [m-1]$.

Propiedades 5. *Las clases de equivalencia verifican las siguientes propiedades:*

i) *Dos elementos a_1 y a_2 están relacionados entre sí ($a_1 \sim a_2$) si, y sólo si, determinan la misma clase de equivalencia ($[a_1] = [a_2]$). Teniendo esto en cuenta, una clase de equivalencia puede representarse por cualquiera de sus elementos.*

   Demostración. Si $a_1 \sim a_2$ y $a \in [a_1]$, entonces $a \sim a_1$ y $a_1 \sim a_2$, nos permiten deducir que $a \sim a_2$, es decir $a \in [a_2]$.

   Recíprocamente, si las clases coinciden, entonces $a_1 \in [a_1] = [a_2]$, es decir $a_1 \sim a_2$. □

ii) *Dos elementos a_1 y a_2 no están relacionados si, y sólo si, $[a_1] \cap [a_2] = \emptyset$.*

   Demostración. Si $a_1 \not\sim a_2$ y $a \in [a_1] \cap [a_2]$, entonces $a_1 \sim a$ y $a \sim a_2$, así que $a_1 \sim a_2$, lo que contradice la hipótesis de partida. El recíproco es análogo. □

Definición 27. *Una familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos no vacíos de un conjunto A que verifica:*

- $A = \bigcup_{i \in I} A_i$
- $A_i \cap A_j = \emptyset$*, para todo* $i \neq j$

se le llama ***partición*** *de A.*

Es fácil comprobar que una partición define una relación de equivalencia y viceversa. Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una partición de A y $a, b \in A$, se dice que $a \sim b$ si, y sólo si, existe $i \in I$ tal que $a, b \in A_i$.

Ejemplo 30. *Sea $A = \{$cadenas de longitud 8 formadas por 0 y 1$\}$*

i) *Los conjuntos $A_1 = \{$cadenas en A que empiezan por 1$\}$, $A_2 = \{$cadenas en A que empiezan por 00$\}$ y $A_3 = \{$cadenas en A que empiezan por 01$\}$ forman una partición de A.*

II) *Los conjuntos* $A_1 = \{$*cadenas en* A *que empiezan por 11*$\}$, $A_2 = \{$*cadenas en* A *que empiezan por 00*$\}$ *y* $A_3 = \{$*cadenas en* A *que empiezan por 01*$\}$ *no forman una partición de* A.

Definición 28. *Dada una relación de equivalencia* $\sim$ *definida en un conjunto* A, *se llama* ***conjunto cociente*** *de* A *respecto a* $\sim$, *y se denota* $A/\sim$, *al conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia determinadas en* A *por* $\sim$. *En el ejemplo que estamos manejando, el conjunto cociente* $\mathbb{Z}/\equiv_m$ *tiene* m *elementos. Este conjunto se denota* $\mathbb{Z}_m$ *y se llama conjunto de restos módulo* m.

2.3.4. Relación de orden

A menudo empleamos relaciones para ordenar algunos o todos los elementos de un conjunto.

Definición 29. *Si* $\preccurlyeq$ *es una relación binaria en* A *reflexiva, antisimétrica y transitiva, se dice que es una* ***relación de orden***.

Una relación de orden $\preccurlyeq$ en un conjunto A es **de orden total** si dados dos elementos cualesquiera a, b de A, siempre se pueden comparar, es decir $a \preccurlyeq b$ o $b \preccurlyeq a$. Un ejemplo de relación de orden total es la relación $\leq$ en $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, mientras que las relaciones "$\subseteq$" y "divide a" definidas anteriormente no son de orden total.

Definición 30. *Un* ***poset*** $(A, \preccurlyeq)$ *es un conjunto* A *y una relación de orden* $\preccurlyeq$ *definida en él.*

Ejemplo 31. I) *Son ejemplos de posets* $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ *y* $(\mathbb{N}, |)$.

II) *Sea* $(L, \leq)$ *un alfabeto, es decir un conjunto finito totalmente ordenado y sea* L^* *el conjunto de palabras que se pueden formar con los elementos de* L. *El orden de* L *se puede extender a* L^* *siendo la relación de orden resultante de orden total y llamada* orden lexicográfico *por ser el orden del diccionario. Así, las palabras* $l_1 l_2 \ldots l_p$ *y* $l'_1 l'_2 \ldots l'_q$ *están relacionadas y verifican que* $l_1 l_2 \ldots l_p \leq l'_1 l'_2 \ldots l'_q$, *si ocurre:*

- *para algún* $k < p$, *se tiene que* $l_i = l'_i$ *(con* $i = 1, \ldots, k$*)*, $l_{k+1} \leq l'_{k+1}$ *y* $l_{k+1} \neq l'_{k+1}$ *(por ejemplo, casa y caso)*
- $p \leq q$ *y* $l_i = l'_i$, *para* $i = 1, \ldots, p$ *(por ejemplo, casa y casas).*

III) *En la mayoría de las organizaciones y empresas existe un enorme flujo de información. Muchas veces este flujo de información está restringido* *por niveles de seguridad. Para organizar los niveles de seguridad se puede utilizar una relación de orden de la siguiente manera: a cada nivel se le asigna un par (k, A), donde A es un subconjunto de las distintas categorías dentro de la organización (por ejemplo, categorías profesionales), y k es un número entre 0 y 3. Es muy sencillo establecer una relación de orden entre estos pares de elementos, ya que $(k_1, A_1) \leq (k_2, A_2)$ si y sólo si $A_1 \subset A_2$ y $k_1 \leq k_2$. Una vez que se ha establecido esta relación de orden, se permitirá el paso de información de un nivel (k, A) a otro (n, B) si, y sólamente si, $(k, A) \leq (n, B)$.*

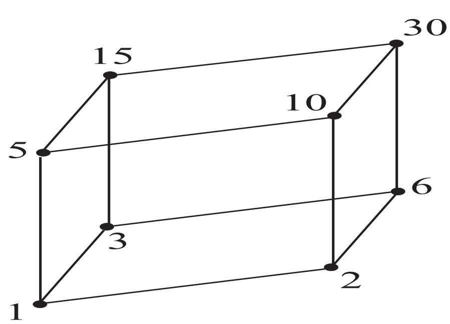
Por ejemplo, en un gobierno de un país podemos definir las categorías {Presidente, Primer Ministro, Ministro, Secretario}. Una información de tipo (2, {Presidente, Secretario}) podrá ser utilizada por una información tipo (2, {Presidente, Secretario, Ministro}), pero no al revés.

Cuando $(A, \preccurlyeq)$ es un poset finito, se puede representar con un diagrama de Hasse que consiste en un conjunto de vértices (denotando los elementos de A) y una serie de aristas (sin flecha). Dibujaremos una arista ascendente de x a y si y *cubre a* x, es decir, $x \leq y$ y no hay "elementos intermedios" entre ambos, es decir, si $z \in A$ es tal que $x \leq z \leq y$, entonces $z = x$ o $z = y$.

Definición 31. *Dos posets $(A, \preccurlyeq)$ y $(B, \leq)$ son **isomorfos** si existe una aplicación biyectiva $f : A \to B$, de modo que:*

$$a \preccurlyeq a' \iff f(a) \leq f(a').$$

Ejemplo 32. *Los posets $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$, $(D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}, |)$* [1] *y $(\{0, 1\}^3, R)$ son isomorfos* [2].



D30

[1] D_m denota el conjunto de divisores positivos de m.
[2] R es la relación dada por $(a, b, c) \leq (a', b', c') \Leftrightarrow (a \leq a') \wedge (b \leq b') \wedge (c \leq c')$

2.3.5. Elementos distinguidos en un poset

Sea $(P, \leq)$ un poset.

Definición 32. *Un elemento $m \in P$ es un* ***maximal*** *si* [3]

$$\neg \exists p \in P \quad [(m \leq p) \wedge (m \neq p)],$$

es decir, no hay elementos en P "estrictamente mayores" que m.

Definición 33. *Un elemento $n \in P$ es un* ***minimal*** *si* [4]

$$\neg \exists p \in P \quad [(p \leq n) \wedge (n \neq p)],$$

es decir, no hay elementos en P "estrictamente menores" que n.

Un poset puede tener varios maximales y varios minimales y, si es finito, tiene al menos un maximal y al menos un minimal. Si P es un poset finito, dado $p \in P$ existe al menos un maximal m de P (respectivamente, un minimal n de P) tal que $p \leq m$ (respectivamente, $n \leq p$).

Definición 34. *Un elemento $M \in P$ es* ***máximo de*** *P si $p \leq M$, para todo $p \in P$.*

Definición 35. *Un elemento $m \in P$ es* ***mínimo de*** *P si $m \leq p$, para todo $p \in P$.*

Proposición 2. *Se verifican los siguientes enunciados:*

i) *El máximo, si existe, es único.*

ii) *El mínimo, si existe, es único.*

iii) *Si P es finito, P tiene máximo si, y sólo si, tiene un un único maximal.*

iv) *Si P es finito, P tiene mínimo si, y sólo si, tiene un un único minimal.*

Sea ahora $Q \subseteq P$ un subconjunto de P.

Definición 36. *Un elemento $a \in P$ es una* ***cota superior de*** *Q* ***en*** *P si $q \leq a$, para cualquier $q \in Q$.*

Definición 37. *Un elemento $b \in P$ es una* ***cota inferior de*** *Q* ***en*** *P si $b \leq q$, para cualquier $q \in Q$.*

[3] Equivalentemente, $\forall p \in P \quad [(m \leq p) \rightarrow (m = p)]$.
[4] Equivalentemente, $\forall p \in P \quad [(p \leq n) \rightarrow (n = p)]$.

Definición 38. *Un elemento $a \in P$ es **supremo de** Q si*

- *a es una cota superior de Q en P, es decir, $q \leq a$, para todo $q \in Q$.*
- *Si b es otra cota superior de Q en P, necesariamente $a \leq b$.*

Queda claro que, si el conjunto de cotas superiores de Q en P es no vacío, entonces el supremo es el mínimo de dicho conjunto.

Definición 39. *Un elemento $c \in P$ es **ínfimo de** Q si*

- *c es una cota inferior de Q en P, es decir, $c \leq q$, para todo $q \in Q$.*
- *Si d es otra cota inferior de Q en P, necesariamente $d \leq c$.*

Igual que ocurre con el supremo, si el conjunto de cotas inferiores de Q en P es no vacío, entonces el ínfimo es el máximo de dicho conjunto.

Proposición 3. *Se verifican los siguientes enunciados:*

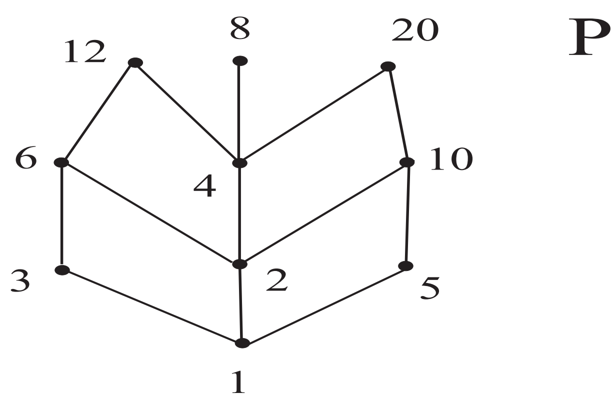
i) *El supremo de Q, si existe, es único.*

ii) *El ínfimo de Q, si existe, es único.*

iii) *Existe el máximo de Q si, y sólo si, existe el supremo y éste es un elemento de Q.*

iv) *Existe el mínimo de Q si, y sólo si, existe el ínfimo y éste es un elemento de Q.*

Ejemplo 33. *En el conjunto $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 20\}$, se considera la relación de orden parcial de divisibilidad y el subconjunto $Q = \{1, 2, 4, 10\}$. Es fácil ver que Q no tiene máximo porque tiene dos maximales (4 y 10). El supremo de Q en P es 20. Por otro lado, el único minimal 1 es mínimo e ínfimo. Por su parte, P tiene tres maximales (8, 12 y 20), no tiene máximo y su mínimo es 1.*



2.4. Aplicaciones

El concepto de aplicación (función) es de gran importancia en Informática. Una función es el modo más natural de implementar la correspondencia entre los datos y el resultado de un proceso de cálculo en un ordenador. Los llamados *lenguajes funcionales* como OCAML, HASKELL, etc., se fundamentan en este concepto y suelen identificar programa y función.

Definición 40. *Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Una **aplicación** f de A en B es una regla que asocia a* cada *elemento a de A un* único *elemento de B que se denomina* imagen *de a y se denota $f(a)$.*

El conjunto A se llama *conjunto inicial*, y el B *conjunto final*. La relación entre a y b debida a f se suele representar de la forma:

$$\begin{array}{rcl} f : A & \longrightarrow & B \\ a & \rightsquigarrow & f(a) = b \end{array}$$

Se suele denominar *función* a la correspondencia $f : A \to B$ si A y B son conjuntos numéricos. Con frecuencia, se utiliza la letra x para denotar los elementos del conjunto inicial de f, y la letra y para los elementos del conjunto final.

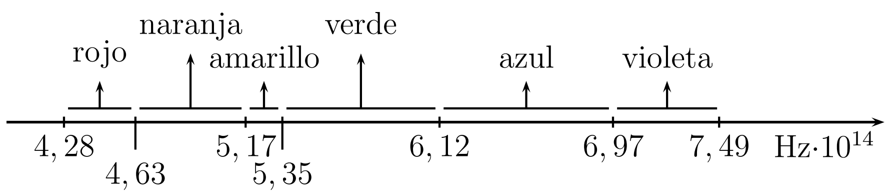


Figura 2.13: Aplicación del espectro visible

Ejemplo 34. I) *Se puede considerar que el arco iris define una aplicación que asocia a cada rango de frecuencias del espectro electromagnético, un color de los que percibimos tal como se muestra en la figura 2.13.*

II) *El horario de un ferrocarril define una aplicación que asocia a cada estación $a, b, c, \ldots$ un número que sirve para expresar la medida del tiempo (8h, 8h30m, 8h57m,...) que invertirá el tren en llegar a cada estación.*

Puesto que a cada estación sólo le puede corresponder una hora de llegada del tren, esta correspondencia entre estaciones y horarios es efectivamente una aplicación.

iii) *Una tabla de seguros de vida es una función que asocia cada edad del solicitante (1 año, 2 años, 3 años, etc.) el importe de las primas que ha de pagar para suscribir tal seguro.*

iv) *La regla que permite calcular el perímetro p de una circunferencia multiplicando su diámetro 2r (siendo r el radio) por la constante π, es una función real de variable real, ya que el conjunto inicial es el de los números reales, $\mathbb{R}$, y coincide con el de llegada. Se representa:*

$$p = f(r) = 2\pi r$$

v) *La correspondencia que asigna a cada número real x el valor real r siendo $r^2 = x$ no es aplicación.*

Dos aplicaciones $f : A \to B$ y $g : C \to D$ son *iguales* si $A = C$, $B = D$ y $f(a) = g(a)$, para cualquier elemento a de A.

Definición 41. *Sea $f : A \to B$ una aplicación y sean $A_1 \subseteq A$ y $B_1 \subseteq B$ dos subconjuntos de A y B respectivamente. Definimos la imagen por f del conjunto A_1 como:*

$$f(A_1) := \{f(a)\,;\, a \in A_1\} \subseteq B$$

y la imagen recíproca por f del conjunto B_1 como:

$$f^{-1}(B_1) := \{a \in A\,;\, f(a) \in B_1\} \subseteq A$$

Si tomamos como $A_1 = A$, al conjunto $f(A) = Imf$ le denominamos *conjunto imagen.*

Ejemplo 35. *Sea $f : A = \{1, 2, 3\} \to B = \{x, y, z, t\}$ la aplicación dada por $f(1) = x, f(2) = z, f(3) = z$. Es claro que*

$$f(\{1\}) = \{x\},\ f(\{2\}) = \{z\},\ f(\{3\}) = \{z\}$$

y, por otro lado,

$$f^{-1}(\{x, y\}) = \{1\} \text{ y } f^{-1}(\{y, t\}) = \emptyset.$$

Propiedades 6. *Sea $f : A \to B$ una aplicación y sean $A_1, A_2 \subseteq A$ y $B_1, B_2 \subseteq B$ subconjuntos de A y B respectivamente. Se verifica:*

i) $f(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ *y* $f^{-1}(B) = A$

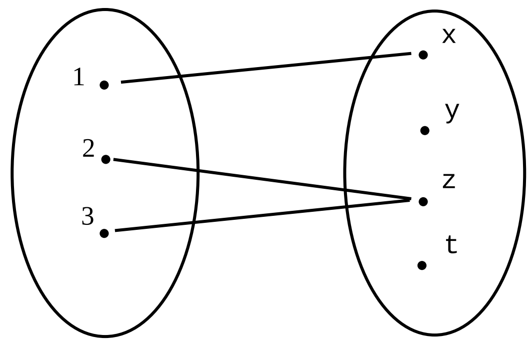


Figura 2.14: Aplicación entre conjuntos

II) *Si* $A_1 \subseteq A_2$, *entonces* $f(A_1) \subseteq f(A_2)$

III) *Si* $B_1 \subseteq B_2$, *entonces* $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$

IV) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

La igualdad no es cierta, en general. Basta tomar $A_1 = \{2\}$ *y* $A_2 = \{3\}$ *en el el ejemplo 35.*

V) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

VI) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

VII) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

VIII) $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$

Si tomamos $A_1 = \{2\}$ *en el ejemplo 35 comprobamos que* $\{2\} \subset f^{-1}(f(\{2\}) = f^{-1}(\{z\}) = \{2, 3\}$

IX) $f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$

Si tomamos $B_1 = B = \{x, y, z, t\}$ *en el ejemplo 35 comprobamos que* $f(f^{-1}(\{x, y, z, t\}) = f(\{1, 2, 3\}) = \{x, z\} \subset \{x, y, z, t\}$.

Definición 42. *Se dice que una aplicación* $f : A \to B$ *entre* A *y* B *es:*

I) ***inyectiva*** *si dos elementos distintos de* A *tienen diferente imagen en* B, *esto es:*

$$\forall\, a_1, a_2 \in A \quad [a_1 \neq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2)]$$

II) ***sobreyectiva*** *si todo elemento de* B *es imagen, al menos, de un elemento de* A, *es decir:*

$$\forall b \in B,\ \exists a \in A, [b = f(a)].$$

III) ***biyectiva*** *o* ***biunívoca*** *si es inyectiva y sobreyectiva.*

Es interesante destacar que si los conjuntos A y B son finitos y $f : A \to B$ es una aplicación entre ellos, se verifica que:

- Si f es inyectiva entonces $|A| \leq |B|$.
- Si f es sobreyectiva, entonces $|A| \geq |B|$.
- Si f es biyectiva entonces $|A| = |B|$.

Conviene destacar que, si bien no todas las aplicaciones que se pueden definir entre conjuntos con el mismo cardinal son biyectivas, siempre es posible encontrar una aplicación biyectiva entre ellos.

Además, se verifica el siguiente resultado que será de utilidad en la práctica:

Proposición 4. *Si A y B son dos conjuntos finitos con el mismo cardinal y $f : A \to B$ es una aplicación entre ellos, son equivalentes:*

- *f es inyectiva*
- *f es sobreyectiva*
- *f es biyectiva*

Demostración. Si $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, entonces $f(A) = \{f(a_1), \ldots, f(a_n)\}$ y, al ser f inyectiva, $|f(A)| = |A| = |B|$. Puesto que $f(A) \subseteq B$ y tienen el mismo cardinal, es obvio que $f(A) = B$, es decir f es sobreyectiva. Recíprocamente, si f es sobreyectiva y $f(a_1) = f(a_2)$ con $a_1 \neq a_2$, entonces $|f(A)| < |A| = |B|$, lo que contradice la sobreyectividad de f. $\square$

Definición 43. *Dados tres conjuntos A, B y C, y dos aplicaciones f y g tales que*

$$\begin{array}{rcl} f : A & \longrightarrow & B \\ a & \longrightarrow & f(a) = b \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : B & \longrightarrow & C \\ b & \longrightarrow & g(b) = c \end{array}$$

*se llama **composición de f con g** a la aplicación:*

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : A & \longrightarrow & C \\ a & \longrightarrow & (g \circ f)(a) = g[f(a)] = g(b) = c \end{array}$$

Ejemplo 36. *Sea* $A = \{1,2,3,4,5\}$ *y sean* $f, g : A \to A$ *las aplicaciones definidas por* $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = f(5) = 1$ *y* $g(1) = 5, g(2) = 4, g(3) = 3, g(4) = 2$ *y* $g(5) = 1$. *Es evidente que* $(g \circ f)(a) = 5$ *y* $(f \circ g)(a) = 1$, *para todo* $a \in A$. *Por lo tanto,* $g \circ f \neq f \circ g$.

La composición de aplicaciones tiene la propiedad *asociativa*, es decir, dadas tres aplicaciones $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ y $h : C \longrightarrow D$:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Proposición 5. *Sean* $f : A \to B$ *y* $g : B \to C$ *dos aplicaciones cualesquiera. Se verifica que:*

- *Si* f *y* g *son inyectivas, también lo es* $g \circ f$
- *Si* f *y* g *son sobreyectivas, también lo es* $g \circ f$
- *Si* f *y* g *son biyectivas, también lo es* $g \circ f$

Demostración. Si f y g son inyectivas y a_1, a_2 son dos elementos de A tales que $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$, entonces $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ (por definición de composición). Puesto que g es inyectiva, se verifica que $f(a_1) = f(a_2)$ y, la inyectividad de f permite concluir que $a_1 = a_2$.

La demostración de las otras dos afirmaciones es un sencillo ejercicio. □

Definición 44. *Se llama aplicación* ***identidad*** *a una aplicación* I_A *de* A *a* A *de la forma:*

$$\begin{aligned} I_A : A &\longrightarrow A \\ a &\longrightarrow I_A(a) = a \end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que dada cualquier aplicación $f : A \to B$ se verifica que $f \circ I_A = f = I_B \circ f$

Definición 45. *Sea* $f : A \to B$ *una aplicación. Se llama* ***aplicación inversa*** *de* f, *y se denota por* f^{-1}, *a una aplicación* $f^{-1} : B \to A$ *tal que, si* b *es un elemento de* B,

$$f^{-1}(b) = a \Longleftrightarrow b = f(a)$$

Puede que no exista aplicación inversa de f.

Proposición 6. *Dada una aplicación* $f : A \to B$, f *admite inversa si, y sólo si,* f *es biyectiva. Además,*

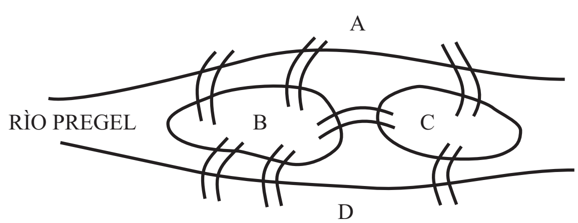
- *Si* f *es inversible, su inversa* f^{-1} *es la única aplicación verificando* $f \circ f^{-1} = I_B$ *y* $f^{-1} \circ f = I_A$
- *Si* f *es inversible, su inversa* f^{-1} *también lo es y* $(f^{-1})^{-1} = f$
- *Si* $f : A \to B$ *y* $g : B \to C$ *son dos aplicaciones inversibles, entonces* $g \circ f$ *también lo es y* $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

2.5. Grafos

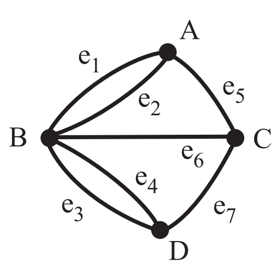
La teoría de grafos es una disciplina antigua con muchas aplicaciones modernas. Sus ideas básicas las introdujo el gran matemático suizo Leonhard Euler en el siglo XVIII. Euler utilizó los grafos para resolver el famoso problema de los puentes de Königsberg.

Los grafos se emplean para resolver problemas de diversas áreas. Pueden utilizarse, por ejemplo, para determinar si se puede o no implementar un circuito sobre una placa de una sola capa, para estudiar la estructura de una red de internet, para determinar si dos ordenadores están conectados o no dentro de una red informática, para hallar el camino más corto entre dos ciudades en una red de transportes, ...

El primer trabajo sobre la teoría de grafos aparece en 1736 y fue escrito por el matemático Leonnard Euler (1700-1783). Este trabajo comienza con la discusión de un problema surgido en la ciudad de Königsberg (ahora Kaliningrado, Rusia). La ciudad estaba dividida en cuatro partes por los dos brazos en los que se bifurca el río Pregel. Estas cuatro partes eran las dos regiones a orillas del río Pregel, la isla de Kneiphof y la región que quedaba entre ambos brazos del río. Siete puentes conectaban entre sí estas regiones en el Siglo XVII. La figura siguiente ilustra las regiones y los puentes.



Los habitantes se preguntaban: *¿Es posible recorrer los siete puentes pasando por todos ellos una única vez, partiendo y llegando al mismo sitio?* Para tratar de resolver el problema, conocido como *Problema de los puentes de Königsberg*, Euler representó esquemáticamente las áreas de tierra por puntos y los puentes por líneas conectando esos puntos. El resultado constituye un ejemplo de grafo:



$$V = \{A, B, C, D\}$$
$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$
$$e_1 = \{A, B\}, \ldots e_7 = \{C, D\}$$

De la obtención de algunas propiedades básicas de grafos, Euler dedujo que no era posible recorrer todos los puentes una sola vez.

2.6. Conceptos básicos

Consideraremos grafos finitos no dirigidos.

Por ejemplo, una red de ordenadores puede ser representada por un grafo no dirigido donde cada ordenador este representado por un punto y dos ordenadores conectados entre sí se representaría por una arista.

Definición 46. *Un **grafo** es un par $G = (V, E)$, donde V es un conjunto finito no vacío, cuyos elementos se llaman* vértices *o **nodos**, y E es una familia, cuyos elementos se llaman **aristas**. Una arista es un "par no ordenado" de vértices de V.*

Se dice que dos vértices u y v de G son **adyacentes** si $\{u, v\}$ es una arista de G. Si $e = \{u, v\}$, se dice que la arista e *incide* en los vértices u y v, que la arista e *conecta* u y v, o que los vértices u y v son *extremos* de la arista e.

Según esta definición de grafo, se admiten **aristas múltiples**, es decir, aristas distintas que inciden en los mismos vértices (como las aristas e_1 y e_2 del ejemplo de los puentes de Königsberg) y **lazos**, es decir, aristas de la forma $e = \{v, v\}$. Se dirá que un grafo es *simple* si no tiene lazos ni aristas múltiples.

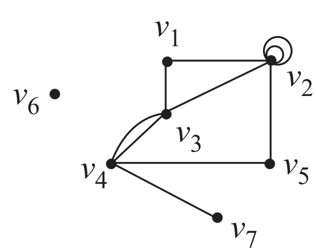
Nota: No todos los textos utilizan la misma nomenclatura.

Si $G = (V, E)$ es un grafo con $|V| = n$, se dice que G es un grafo finito *de orden n*.

El **grado de un vértice** de un grafo es el número de aristas incidentes en él, exceptuando los lazos, cada uno de los cuales contribuye con dos unidades al grado del vértice. El grado del vértice v se denota por $\partial(v)$

A los vértices de grado 0 se les denomina *aislados*. Se dice que un vértice es una *hoja*, si tiene grado 1.

Ejemplo 37.



$$\begin{array}{llll} \partial(v_1)=2 & \partial(v_6)=0 & \partial(v_7)=1 & \\ \partial(v_2)=7 & \partial(v_5)=2 & \partial(v_3)=4 & \partial(v_4)=4 \end{array}$$

Proposición 7. *La suma de los grados de todos los vértices de un grafo $G=(V,E)$ es igual al doble del número de aristas.*

Demostración. Al calcular la suma de los grados de los vértices, cada arista contribuye con dos unidades, ya que cada una es incidente con dos vértices (posiblemente iguales). Luego la suma de los grados de los vértices es $2 \times$ *nº de aristas*.

Proposición 8. *En un grafo finito el número de vértices de grado impar es par.*

Demostración. Sean V_1 y V_2 el conjunto de vértices de grado impar y el conjunto de vértices de grado par, respectivamente, del grafo $G=(V,E)$. Entonces,

$$\sum_{v\in V}\partial(V)=\sum_{v\in V_1}\partial(v)+\sum_{v\in V_2}\partial(v)$$

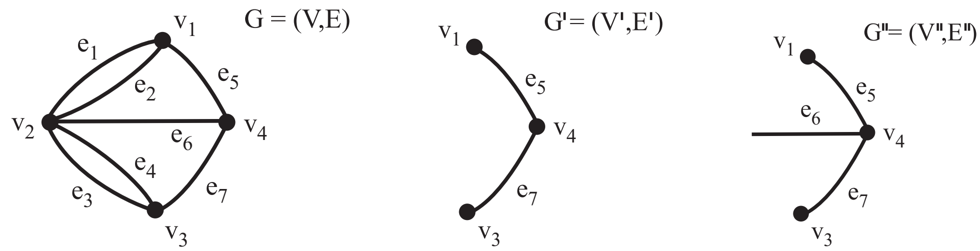
Como $\partial(v)$ es par si v es un elemento de V_2, $\sum_{v\in V_2}\partial(v)$ es par. Entonces,

$$\sum_{v\in V_1}\partial(v)=\sum_{v\in V}\partial(v)-\sum_{v\in V_2}\partial(v)=2|E|-\sum_{v\in V_2}\partial(v)$$

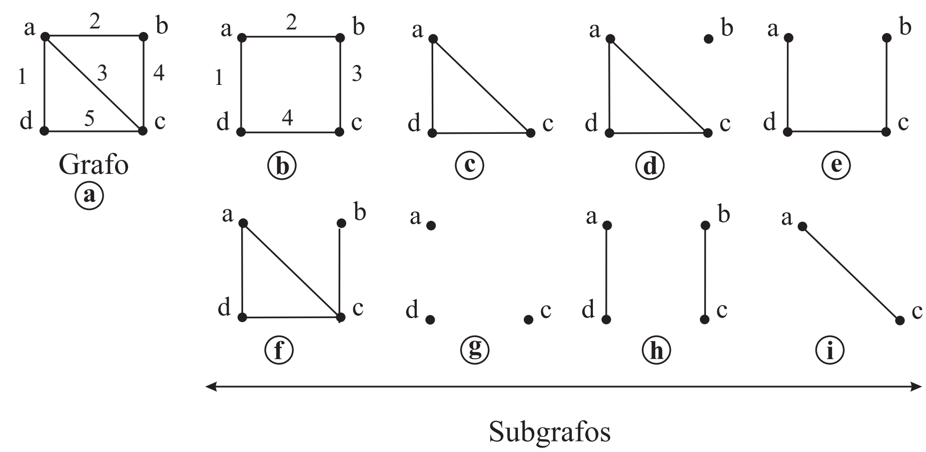
es par. Como todos los términos que se suman en $\sum\limits_{v\in V_1}\partial(v)$ son impares, tiene que haber un número par de sumandos. Por tanto, hay un número par de vértices de grado impar.

Definición 47. *Sea $G=(V,E)$ un grafo. Si $G'=(V',E')$ es otro grafo donde $V'\subseteq V$ y $E'\subseteq E$ se dice que G' es* **subgrafo** *de G (nótese que, puesto que G' es un grafo, cada arista de E' es incidente con vértices de V').*

Ejemplo 38. *Sea $G=(V,E)$ de los puentes de Königsberg. El grafo $G'=(V',E')$ con $V'=\{v_1,v_3,v_4\}$ y $E'=\{e_5,e_7\}$ es subgrafo de G, pero $G''=(V'',E'')$ con $V''=\{v_1,v_3,v_4\}$ y $E''=\{e_5,e_6,e_7\}$ no lo es, pues $e_6=\{v_2,v_4\}$ y $v_2\notin V''$.*



Ejemplo 39. *Un grafo puede tener varios subgrafos:*



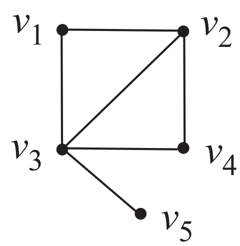
2.7. Matriz de adyacencia de un grafo

Existen distintas maneras de representar un grafo de forma conveniente para su estudio mediante un ordenador. Las más importantes son las representaciones matriciales, una de ellas es la siguiente.

Sea $G = (V, E)$ un grafo con $|V| = n$, supongamos que los vértices de G se enumeran como $v_1, v_2, ..., v_n$. La matriz de adyacencia de G con respecto a este listado de los vértices es la matriz cuadrada de orden n cuyo elemento de lugar (i, j) es

$a_{ij} =$ número de aristas que unen el vértice v_i con el vértice v_j

Ejemplo 40. *Veamos un ejemplo de matriz de adyacencia:*



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} &
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

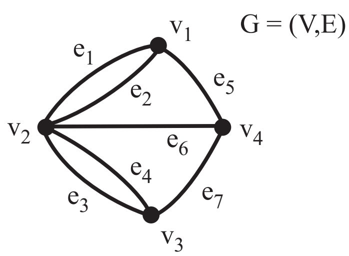
Nótese que la matriz de adyacencia es simétrica y que permite conocer rápidamente el grado de un vértice v_i, simplemente sumando los elementos de la fila o columna i de A (cada lazo, al igual que antes, cuenta 2).

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \partial v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}$$

Si G no tiene lazos $a_{ii} = 0$, $\forall i$.

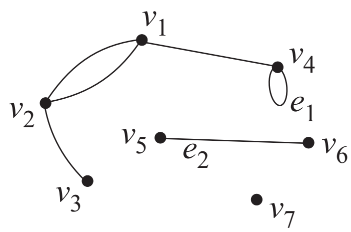
Si G es simple, su matriz de adyacencia sólo tiene ceros y unos.

Ejemplo 41. *En el ejemplo anterior de los puentes de Königsberg*



la matriz A es una matriz de orden 4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El elemento a_{44} es 2 pues e_1 "entra y sale" del mismo vértice v_4, por lo que ha de ser contada dos veces en v_4, añade 2 unidades al grado de v_4.

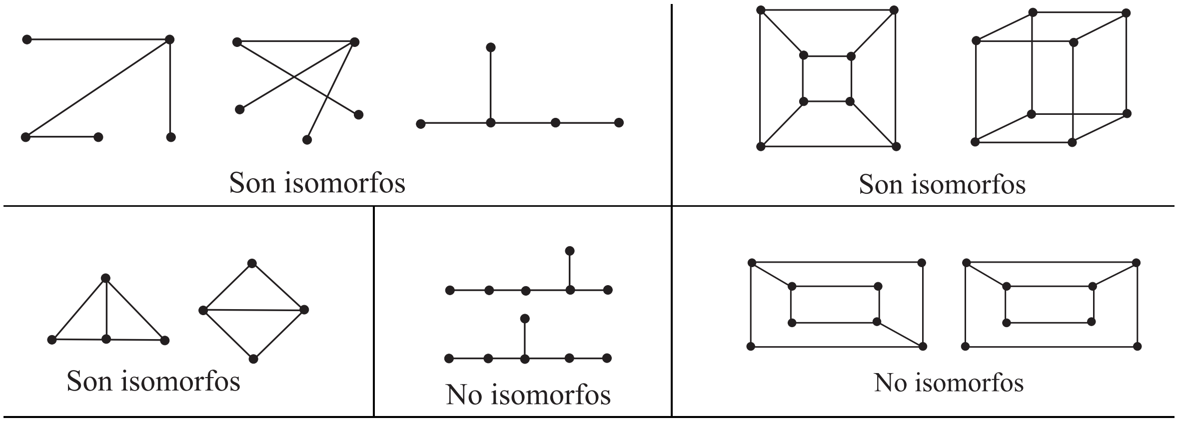
Es claro que esta matriz especifica completamente el grafo que representa puesto que exhibe todo lo referente a los vértices, aristas y las relaciones entre ellos.

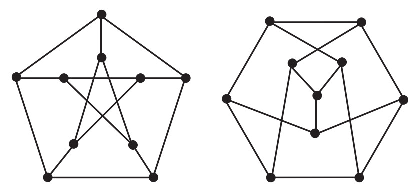
2.8. Grafos isomorfos

A menudo se necesita saber si es posible o no dibujar dos grafos de la misma forma. Se dispone de una terminología muy útil para los grafos que tienen la misma estructura.

Definición 48. *Dos grafos $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ se dice que son* isomorfos *si hay aplicaciones biyectivas $\varphi : V \to V'$ y $\psi : E \to E'$ tales que*

$$e = \{u, v\} \in E \Leftrightarrow \psi(e) = \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E'.$$





Son isomorfos

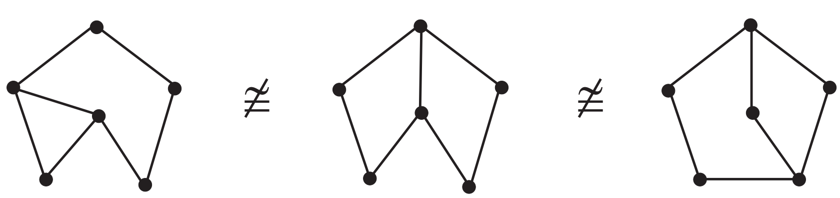
Ver si dos grafos son o no isomorfos es difícil. Para resolver este problema suelen buscarse datos necesariamente comunes a todos los grafos isomorfos:

i) $|V| = |V'|$

ii) $|E| = |E'|$

iii) $\partial v = \partial(\varphi(v)), \forall v \in V$

Aunque no es suficiente el que estos tres puntos se cumplan para que dos grafos sean isomorfos. Por ejemplo:



Si dos grafos G y G' son isomorfos sólo varía la apariencia, es decir, que se mantienen las adyacencias, estructura, caminos, circuitos, número de vértices, número de aristas, etc.

2.9. Conexión

De manera informal, un camino es una secuencia de aristas que comienzan en un vértice del grafo y recorre ciertas aristas del grafo siempre conectando pares de vértices adyacentes.

Definición 49. *Sea k un entero no negativo y sean u y v vértices de un grafo $G = (V, E)$. Un* camino *o* trayectoria *de longitud k de u a v en G es una secuencia de k aristas $e_1, e_2, ..., e_k$ tal que $e_1 = \{x_0, x_1\}$, $e_2 = \{x_1, x_2\}$, ..., $e_k = \{x_{k-1}, x_k\}$, donde $x_0 = u$ y $x_k = v$.*

Si el grafo es simple, denotamos este camino por su secuencia de vértices $x_0, x_1, ..., x_k$ (ya que al enumerar estos vértices se determina el camino de forma única). Nótese que un camino de longitud cero consiste en un único vértice.

Un camino que comienza y termina en un mismo vértice se llama *circuito*. Por ejemplo, un lazo es un circuito de longitud 1.

Un camino se dice *simple* o *propio* si en él no se repiten los vértices. Cuando se trata de un circuito, de dirá que es simple o propio si los únicos vértices que se repiten son los extremos.

Ejemplo 42. *En el grafo de la figura (a), d, a, c, a, b es un camino (no simple) de longitud 4, y a, c, b, a es un circuito (simple) de longitud 3. Sin embargo, a, b, d, c no es una trayectoria ya que $\{b, d\}$ no es una arista del grafo.*

El número de caminos de cierta longitud que hay entre dos vértices de un grafo se puede determinar usando su matriz de adyacencia.

Teorema 3. *Sea G un grafo, A su matriz de adyacencia con respecto a la ordenación $v_1, v_2, ..., v_n$ y k un entero positivo. El número de caminos de longitud k de v_i a v_j es igual al elemento de lugar (i, j) de la matriz A^k.*

Demostración.

Se hace por inducción en k.

I) Para $k = 1$ es la definición de A.

II) Supongamos que el resultado es cierto para r, es decir, que el elemento del lugar (i, j) de la matriz A^r es el número de caminos de longitud r de v_i a v_j. Como $A^{r+1} = A^r A$, el elemento del lugar (i, j) de A^{r+1} es el producto de la fila i de A^r por la columna j de A, es decir,

$$b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + ... + b_{in}a_{nj},$$

donde b_{is} es el elemento del lugar (i, s) de A^r.

Un camino de longitud $r+1$ de v_i a v_j está formado por un camino de longitud r de v_i a algún vértice intermedio v_s y por una arista de v_s a v_j. Por la regla del producto, el número de caminos de ese tipo es el producto del número de caminos de longitud r de v_i a v_s, que es b_{is}, por el número de aristas de v_s a v_j, que es a_{sj}. Al sumar todos esos productos para todos los posibles vértices intermedios v_s, se obtiene el resultado que buscamos en virtud de la regla de la suma.

Nota. Si entre dos vértices de un grafo de orden n hay un camino de longitud mayor o igual que n, algún vértice debe estar repetido y esto indica que dicho camino tiene algún circuito. Suprimiendo éstos de modo que el camino resultante no pase por ningún vértice más de una vez, se obtiene un camino de longitud menor que n que conecta los vértices dados.

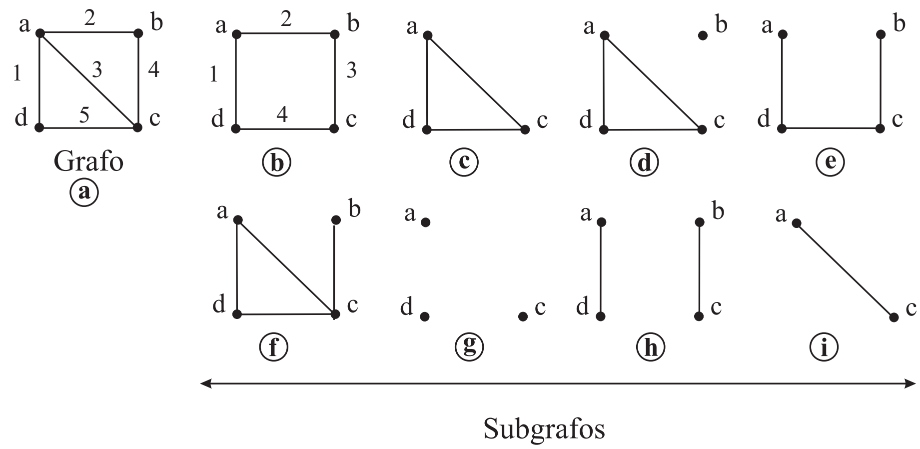
En el grafo (a) (ver 39), dados dos vértices cualesquiera siempre se puede encontrar una trayectoria que los una. Esto conduce a un concepto muy importante en la teoría de grafos: la conexión.

Definición 50. *Si u y v son vértices de un grafo G, se dice que* ***están conectados*** *si, y sólo si, $u = v$ o existe un camino que los une.*

Esta es una relación de equivalencia en V y sus clases de equivalencia definen una partición de V, $\{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$. Para cada $i = 1, 2, \ldots, r$ el subgrafo inducido (V_i, E_{Vi}) tiene todas las aristas de G que inciden en dos vértices cualesquiera de V_i y se denomina *componente conexa* de G. Dos grafos isomorfos tienen el mismo número de componentes conexas.

Definición 51. *Un grafo se dice* ***conexo*** *si tiene una única componente conexa, es decir, todos los vértices del grafo están relacionados (cada par de vértices están conectados, al menos, por un camino). En otro caso el grafo se dice* disconexo*.*

Ejemplo 43. *En el ejemplo ya visto 39,*



*Son grafos conexos **a**, **b**, **c**, **e**, **f**, **i**. Son grafos no conexos **d** (tiene dos componentes), **g** (tiene 3 componentes), **h** (tiene dos componentes).*

Las componentes conexas de un grafo son sus subgrafos conexos maximales.

Para comprobar si un grafo es conexo podemos utilizar la matriz de adyacencia del grafo pues, como consecuencia del teorema 3 y de la nota anterior, se tiene que: *Un grafo G es conexo si, y sólo si, todos los elementos no diagonales de $A + A^2 + ... + A^{(n-1)}$ son no nulos, siendo A la matriz de adyacencia de G.*

Ejemplo 44. *La red de internet se puede pensar como un grafo, donde los vértices son las páginas web, y las aristas enlaces entre ellas. Para hacernos una idea de la magnitud de este grafo, diremos que en 1999 una instantánea de la red produjo un grafo con más de* 200 *millones de vértices y más de* 1500 *millones de aristas.*

Este enorme grafo tiene varias componentes conexas, estando la mayor de ellas compuesta por el 90 % *de las páginas web existentes. Dentro de esta enorme componente conexa podemos definir un subgrafo, al que llamaremos* GSCC *(giant strongly connected component, en inglés), que es el mayor que cumple que se puede llegar a cualquier página web desde cualquier otra página web dentro de él sin más que seguir enlaces (nótese que se puede pensar como un grafo dirigido, de tal manera que habrá una arista entre una página a y otra b si en la página a hay un enlace a la página b). Las páginas web que no se encuentran dentro de la GSCC se pueden clasificar en tres tipos: páginas desde las que se puede acceder a la GSCC, pero no se puede acceder a ellas desde la GSCC; páginas a las que se puede acceder desde la GSCC, pero desde ellas no se puede acceder a la GSCC; y páginas desde las que no se* *accede a la GSCC ni se puede acceder desde la GSCC. Cada uno de estos tipos tiene, curiosamente, más o menos, el mismo número de páginas web.*

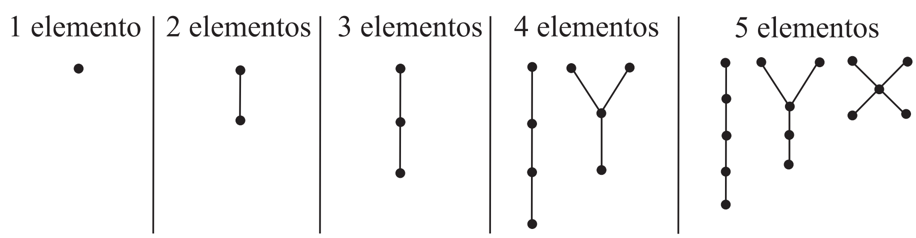
2.10. Árboles

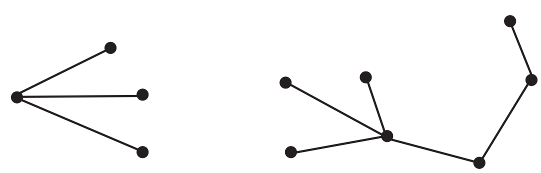
Los árboles son particularmente útiles en informática, pues se emplean en un amplio espectro de algoritmos. Por ejemplo, se usan para constuir algoritmos eficientes que localizan elementos en una lista, para modelar procedimientos que se llevan a cabo mediante una secuencia de decisiones, para construir códigos Huffman (códigos compresores eficientes, que ahorran costes en la transmisión de datos y en su almacenamiento), etc.

Definición 52. *Un* árbol *es un grafo conexo y sin circuitos.*

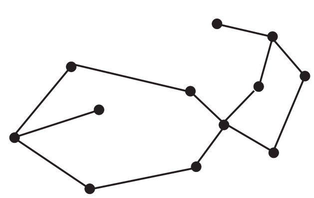
Puesto que un árbol no puede tener circuitos, tampoco puede tener lazos o aristas múltiples, por tanto, es un grafo simple.

Ejemplo 45. *Son árboles los grafos siguientes*





mientras que el siguiente no lo es



Teorema 4. *Para un grafo $G = (V, E)$ son equivalentes:*

(i) *G es un árbol*

(ii) *Cada par de vértices distintos de V está conectados por un único camino.*

(iii) $|V| = |E| + 1$ *y* G *es conexo.*

(iv) $|V| = |E| + 1$ *y* G *no tiene circuitos.*

Ejemplo 46. *Una importante manera de conectar procesadores en paralelo es mediante un árbol. El grafo que representa este tipo de red es un árbol binario completo, que conecta* $2^k - 1$ *procesadores, donde* $k \in \mathbb{N}$*. Un procesador que no es ni raíz ni hoja tiene* 3 *conexiones bidireccionales, una hacia su padre y otras dos hacia sus hijos.*

Veamos un ejemplo de uso de 7 *procesadores en árbol que se ocupan de la tarea de sumar* 8 *números* $\{x_1, x_2, \ldots, x_8\}$ *en* 3 *pasos:*

Paso 1 *El procesador* P_4 *suma* x_1 *y* x_2*, el* P_5 *suma* x_3 *y* x_4*, y así sucesivamente, hasta* P_7*.*

Paso 2 *Los procesadores envían el resultado a sus padres* P_2 *y* P_3*, que suman los números que les llegan.*

Paso 3 P_2 *y* P_3 *envían sus resultados a* P_1*, que los suma, y devuelve el resultado.*

Nótese que este algoritmo en paralelo se realiza en menos pasos que en el algoritmo en serie, que realiza 7 *pasos, consistentes en sumar un número con el resultado de la suma de los anteriores.*