

# Capítulo 4

## Combinatoria

La Combinatoria estudia las distintas formas de agrupar o seleccionar los elementos de un conjunto finito, calcula cuantas selecciones hay y, en ocasiones, las genera. El tipo de selección que se puede hacer depende de varios aspectos; por ejemplo del número de selecciones de los elementos que se hacen, de si influye o no el orden en la selección, de si un mismo elemento puede seleccionarse una o más veces o si deben seleccionarse todos los elementos disponibles.

### 4.1. Técnicas básicas

**Proposición 9. (Principio de la suma)** Sean  $\{A_i ; i = 1, \dots, n\}$  conjuntos finitos con  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , para todo  $i \neq j$ . Entonces:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|$$

*Demostración.* Inducción en  $n$ . □

**Ejemplo 59.** Se quiere elegir un representante de primero de la Facultad para ir a la Olimpiada de Informática. ¿Cuántas posibilidades hay para elegir si en cada grupo de Ingeniería hay 60 alumnos y en cada grupo de las Técnicas hay 100 alumnos? (hay dos grupos en la Ingeniería y cuatro en las Técnicas).

En total, tenemos  $2 \cdot 60 + 4 \cdot 100 = 120 + 400 = 520$  alumnos para escoger.

**Ejemplo 60.** Una biblioteca dispone de 50 libros sobre Lógica y 70 libros sobre Combinatoria. Por el principio de la suma, un alumno puede elegir entre  $120 = 50 + 70$  libros para consultar alguno de esos temas.



**Ejemplo 61.** *Un restaurante italiano prepara 5 variedades de espaguetis, 6 de macarrones y 3 de lasaña. Un cliente puede elegir entre  $14 = 5 + 6 + 3$  platos de pasta para comer.*

Podemos pensar que cada conjunto  $A_i$  está formado por las distintas maneras de realizar una cierta tarea  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) y no se pueden realizar dos tareas simultáneamente. El principio de la suma dice que el número de formas de realizar alguna de las  $n$  tareas es la suma de las maneras de realizar cada una de ellas.

**Proposición 10. (Principio del producto)** *Sean  $\{A_i ; i = 1, \dots, n\}$  conjuntos finitos. Entonces:*

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = \prod_{i=1}^n |A_i|$$

*Demostración.* Inducción en  $n$ . □

**Ejemplo 62.** *Para decidir sobre la instalación o no de un nuevo sistema operativo, el director de un centro reparte a 12 empleados en dos comités. El comité A consta de 5 miembros y estudiará las ventajas del nuevo sistema. El comité B, formado por los 7 empleados restantes, analizará los inconvenientes del sistema. Para tomar una decisión el director quiere hablar con un miembro de cada grupo. Por el principio del producto lo podrá hacer de  $5 \cdot 7 = 35$  formas distintas.*

**Ejemplo 63.** *Se quiere diseñar un código para cada alumno de la Facultad utilizando dos letras (las 26 del alfabeto, sin la ñ) y cuatro cifras (del 0 al 9). Si se pueden repetir las letras pero no las cifras, ¿cuántos códigos diferentes se pueden hacer?*

*Podremos formar  $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 676 \cdot 5040 = 3407040$  códigos distintos.*

Siguiendo con el ejemplo anterior, ¿cuántos códigos podremos formar si permitimos que haya códigos sin letras (es decir sólo con cifras), códigos con una sola letra y cuatro cifras y códigos con dos letras y cuatro cifras? (igual que antes, permitimos que se repitan las letras pero no las cifras)

Hay 5040 códigos sin letras,  $26 \cdot 5040 = 131040$  códigos con una sola letra y 3407040 códigos con dos letras y cuatro números. En total tenemos,  $5040 + 131040 + 3407040 = 3543120$  posibles combinaciones.

Alternativamente podemos pensar en este principio de la siguiente forma. Una gran tarea se puede dividir en  $n$  etapas o subtareas sucesivas, cada conjunto  $A_i$  está constituido por las distintas formas de realizar la etapa

$i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Siempre que se cumpla que modificar la forma en que se realiza una etapa cualquiera modifica la forma de realizar la tarea total; el principio del producto dice que el número de formas de realizar la tarea principal es el producto de las formas de realizar cada una de las etapas.

**Proposición 11. (Principio de distribución, del palomar o del cajón de Dirichlet)** Sean  $m, n$  y  $p$  tres números naturales. Si se desean colocar  $np + m$  objetos en  $n$  cajas, alguna caja debe contener al menos  $p + 1$  objetos.

*Demostración.* Si cada caja contiene como mucho  $p$  objetos, el número total de objetos que podemos colocar es  $np < np + 1 \leq np + m$ .  $\square$

En su versión más simple, este principio dice que si queremos colocar  $m$  objetos en  $n$  cajas, con  $m > n$ , al menos una caja debe contener 2 o más objetos. Es decir, si  $m > n$  no puede existir un aplicación inyectiva de un conjunto de  $m$  elementos en un conjunto de  $n$  elementos.

**Ejemplo 64.** En una reunión de ocho personas, al menos dos de ellas nacieron el mismo día de la semana. Si hay trece o más, dos nacieron el mismo mes.

**Ejemplo 65.** Una reunión está formado por  $n$  matrimonios. ¿Cuántas personas tiene que tener un grupo para poder asegurar que hay al menos un matrimonio entre ellos?

El grupo está formado por, al menos,  $n + 1$  personas.

**Ejemplo 66.** Si la media aritmética de  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  números naturales es estrictamente mayor que  $p$ , uno de los números es mayor que  $p$ .

**Ejemplo 67.** Si se escogen seis números cualesquiera del 1 al 10, por lo menos dos de estos números suman 11.

Consideremos las cinco “cajas”  $\{1, 10\}$ ,  $\{2, 9\}$ ,  $\{3, 8\}$ ,  $\{4, 7\}$  y  $\{5, 6\}$ . Asociemos a cada número la caja que lo contiene. Puesto que hay cinco cajas y seis números, habrá dos números en la misma caja, lo cual implica que suman 11.

**Ejemplo 68.** Demuestra que, dado cualquier conjunto de siete enteros distintos, hay al menos dos de ellos cuya suma o diferencia es un múltiplo de 10.

Consideremos las “cajas”  $\{1, 9\}$ ,  $\{2, 8\}$ ,  $\{3, 7\}$ ,  $\{4, 6\}$ ,  $\{0\}$  y  $\{5\}$ . Asociemos a cada número la caja que contiene a su cifra de las unidades. Puesto que hay seis cajas y siete números, habrá dos números en la misma caja. Si

la caja es la última o la penúltima, su suma y su diferencia es un múltiplo de 10. Si es una de las otras, y los dos números tienen la misma cifra de las unidades, su diferencia es un múltiplo de 10, mientras que si la cifra de las unidades es diferente, su suma será un múltiplo de 10.

**Ejemplo 69.** *Tenemos que pintar 64 bicicletas con 7 colores distintos. Demuestra que hemos de pintar al menos 10 del mismo color.*

Aplicaremos el principio de distribución con  $n = 7$  (colores),  $p = 9$  y  $m = 1$ , ya que hay  $7 \cdot 9 + 1 = 64$  objetos.

## 4.2. Variaciones, Permutaciones y Combinaciones

Contaremos las diferentes colecciones que se pueden formar, según una ley dada (repetiendo o no los elementos, teniendo en cuenta o no el orden), con los elementos de un conjunto finito.

### Variaciones

**Definición 62.** *Sea  $n$  un número natural no nulo, se define el **factorial** de  $n$ ,  $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ . Además  $0! = 1$ .*

*Para todo natural  $n \geq 1$ , se verifica que*

$$n! = n \cdot (n - 1)! \text{ o } (n + 1)! = (n + 1) \cdot n!.$$

Sea  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  un conjunto finito de  $n$  elementos y  $r$  un número natural menor o igual que  $n$ . Una **variación** (ordinaria o sin repetición) de los  $n$  elementos de  $A$  de orden  $r$  es una selección o lista ordenada de  $r$  elementos distintos de  $A$ .

Dos variaciones son distintas si se diferencian en algún elemento o en la posición de alguno de estos en la variación. Por ejemplo, si  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  son variaciones de orden tres diferentes 123 y 124, pero también 123 y 321.

**Nota 2.** *Una variación de orden  $r$  de los elementos de  $A$  es una aplicación inyectiva de  $\{1, 2, \dots, r\}$  en  $A$ .*

**Teorema 10.** *El número de variaciones de un conjunto de  $n$  elementos de orden  $r$  es  $V(n, r) = n(n - 1) \cdot \dots \cdot (n - r + 1) = \frac{n!}{(n-r)!}$ .*

*Demostración.* Aplicación del principio del producto. □



**Ejemplo 70.** *¿De cuántas formas un equipo de biólogos puede programar tres salidas al campo en los próximos cinco días para recoger muestras?*

$$V(5, 3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

**Ejemplo 71.** *Disponemos de siete despachos y queremos asignar cuatro de ellos a cuatro nuevos empleados y dejar el resto para más adelante. ¿De cuántas formas se puede realizar la asignación?*

$$V(7, 4) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

**Ejemplo 72.** *¿Cuántas palabras de cinco letras distintas se pueden formar con las letras de la palabra DISCRETA?*

$$V(8, 5) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$$

**Ejemplo 73.** *El consejo directivo de una empresa farmacéutica tiene 10 miembros de los cuales tres son médicos. Se va a elegir presidente, vicepresidente, secretario y tesorero del consejo.*

- I) *¿De cuántas formas se pueden elegir si se quiere que lo presida un médico?*
  - II) *Idem si queremos que haya exactamente un médico entre los elegidos.*
  - III) *Idem si se quiere que haya al menos un médico entre los cuatro.*
- I) Para presidente tenemos 3 candidatos. Para los otros tres puestos, podemos elegir a cualquiera que no sea el presidente (son 9), así en total tenemos

$$3 \cdot V(9, 3) = 3 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 1512$$

posibilidades.

- II) Supongamos que el médico es el presidente. Tenemos 3 candidatos para ese puesto. Para los otros tres puestos hay 7 candidatos (todos los miembros del consejo que no son médicos), lo que nos da un total de

$$3 \cdot V(7, 3) = 3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 630$$

comisiones presididas por un médico. Para los otros tres puestos el razonamiento es similar, y la respuesta es  $4 \cdot 630 = 2520$ .



- III) Restaremos a las posibilidades totales ( $V(10, 4) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ ) las posibilidades que tenemos de elegir los cuatro puestos sin ningún médico que serán  $V(7, 4) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ . Nos quedan pues  $5040 - 840 = 4200$  formas de elegir los candidatos garantizando que al menos uno de ellos es un médico.

## Variaciones con repetición

Sea  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  un conjunto finito de  $n$  elementos y  $r$  un número natural. Una **variación con repetición** de los  $n$  elementos de  $A$  de orden  $r$  es una selección o lista ordenada de  $r$  elementos, no necesariamente distintos, de  $A$ .

Dos variaciones con repetición son distintas si se diferencian en número de veces que aparece algún elemento de  $A$  o en la posición de estos en la variación. Por ejemplo, si  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  son variaciones con repetición de orden tres diferentes 123 y 124, 123 y 321, 122 y 112; por último, 122 y 212.

En general, dos variaciones con o sin repetición de un conjunto  $A$  de orden  $r$  son distintas si en alguna de las  $r$  selecciones o posiciones los correspondientes elementos de  $A$  son diferentes.

**Nota 3.** *Cualquier variación (con repetición) de orden  $r$  de los elementos de  $A$  es una aplicación de  $\{1, 2, \dots, r\}$  en  $A$ .*

**Teorema 11.** *El número de variaciones con repetición de un conjunto de  $n$  elementos de orden  $r$  es  $VR(n, r) = n^r$ .*

*Demostración.* Al poder repetir los elementos, en cada una de las elecciones tenemos disponibles los  $n$  elementos, por lo que el principio del producto garantiza el resultado.  $\square$

**Ejemplo 74.** *¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden formar con los dígitos 1, 3, 5, 7 y 9?*

$$VR(5, 4) = 5^4 = 625$$

**Ejemplo 75.** *¿Cuántas palabras de cinco letras no necesariamente distintas se pueden formar con las letras de la palabra DISCRETA?*

$$VR(8, 5) = 8^5 = 32768$$

**Ejemplo 76.** *En una cafetería nos dicen que cada bocadillo puede estar formado por los siguientes ingredientes: jamón, chorizo, queso, tomate, lechuga, mayonesa y espárragos, ¿cuántos bocadillos distintos podemos elegir?*

Para cada ingrediente tenemos dos posibilidades, escogerlo (1) o no (0). Como hay siete ingredientes, tenemos, en total  $2^7 = 128$  posibles bocadillos.

**Ejemplo 77.** *¿De cuántas maneras se pueden distribuir 8 bolas diferentes en cinco cajas de distinto color?*

Se trata de contar el número de aplicaciones del conjunto  $\{1, 2, \dots, 8\}$  en el conjunto  $\{1, 2, \dots, 5\}$  que es  $VR(5, 8) = 5^8 = 390625$ .

## Permutaciones

Sea  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  un conjunto finito de  $n$  elementos. Una **permutación** del conjunto  $A$  es una aplicación biyectiva de  $A$  en  $A$ . El conjunto de las permutaciones de  $A$  se representa por  $S_A$ .

**Teorema 12.** *El número de permutaciones de un conjunto de  $n$  elementos es  $P(n) = n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ .*

*Demostración.* Para elegir la imagen de  $a_1$  tenemos  $n$  posibilidades (todas), para la de  $a_2$  tenemos  $n - 1$  elementos para escoger (todos menos el que hemos tomado como imagen de  $a_1$ ), etc. El principio del producto garantiza el resultado.  $\square$

**Ejemplo 78.** *¿Cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar con los dígitos 1, 3, 5, 7 y 9?*

Como son cinco dígitos distintos, el resultado es  $5! = 120$ .

**Ejemplo 79.** *Con las letras de “COMPUTER”, ¿cuántas palabras de ocho letras se pueden formar?*

Como son ocho letras distintas, el resultado es  $8!$ .

Las permutaciones de un conjunto  $A$  también se pueden definir como las posibles reordenaciones de los  $n$  elementos de  $A$ ; es decir, como aplicaciones inyectivas del conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  en  $A$  o variaciones de  $n$  elementos de orden  $n$ ,  $V(n, n)$ .

## Permutaciones con repetición

Estudiamos el caso de las permutaciones permitiendo la repetición de los elementos. Sabemos que hay  $8!$  formas de ordenar las letras de “COMPUTER”. Si consideramos las letras de la palabra “CAJA”, está claro que no son  $4! = 24$  posibles ordenaciones ya que las dos A juegan el mismo papel. De hecho, sólo hay 12 ordenaciones posibles. De forma similar, las posibles ordenaciones de las letras de “ARRABAL” no son  $7! = 5040$ , sólo son 420.

Consideremos  $n$  objetos, distribuidos en  $r$  tipos o clases distintas. Los objetos de un mismo tipo son iguales entre sí, pero diferentes de los de cualquier otro tipo. Hay  $n_1$  objetos del tipo 1,  $n_2$  objetos del tipo 2 y, sucesivamente,  $n_r$  objetos del tipo  $r$ ; así  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$ . Las distintas permutaciones que se pueden hacer en estas condiciones reciben el nombre de permutaciones con repetición de  $n$  objetos con  $n_1, n_2, \dots, n_r$  repeticiones y su número es

$$PR(n; n_1, n_2, \dots, n_r) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

con  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$ .

*Demostración.* Por el principio del producto, de cada una de las permutaciones con repetición se obtienen  $n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!$  permutaciones usuales, una por cada posible ordenación de los  $n_i$  objetos de cada tipo, si los consideramos distintos. Por tanto,  $PR(n; n_1, n_2, \dots, n_r) \cdot n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r! = n! = P(n)$ . Despejando se obtiene la expresión.  $\square$

**Ejemplo 80.** 1) *¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras de la palabra ABRACADABRA?*

Como hay 5 A's, 2 B's, 2 R's una C y una D, tenemos

$$\begin{aligned} PR(11; 5, 2, 2, 1, 1) &= \frac{11!}{5! 2! 2!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4} = \\ &= 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 = 83160 \end{aligned}$$

posibles ordenaciones.

II) *¿En cuántas figuran cuatro A's juntas (exactamente cuatro)?*

Formamos un bloque con cuatro A's y ordenamos primero 2 R's, 2 B's, la otra A, una D y una C, lo cual puede hacerse de

$$PR(7; 2, 2, 1, 1, 1) = \frac{7!}{2! 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4} = 1260$$

formas. Por otro lado, el bloque de A's que tenemos podemos colocarlo en cualquiera de las seis posiciones que no se corresponden con la anterior y la posterior a la A<sup>1</sup>, para que no queden las cinco A's juntas. Así, la respuesta es:

$$6 \cdot 1260 = 7560 \text{ colocaciones posibles.}$$

<sup>1</sup>Si la ordenación fuese *ABRRCD*, podemos situarlo en lugar de cualquiera de los  $\square$ , es decir *AB\square B\square R\square R\square C\square D\square*.



III) ¿En cuántas figura cada B seguida de al menos 2 A's?

Formamos dos bloques BAA, BAA. Quedan 2 R's, una C, una D, una A y dos bloques. Por lo tanto, tenemos

$$\frac{7!}{2!2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4} = 1260 \text{ posibilidades.}$$

IV) ¿En cuántas figuran los bloques ABR?

Hay dos bloques ABR y quedan 3 A's, una C y una D. tenemos, en total

$$\frac{7!}{3!2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 420$$

disposiciones con los bloques requeridos.

**Ejemplo 81.** Para trasladarnos de un punto  $A(0,0)$  hasta un punto  $B(5,4)$  podemos movernos únicamente de izquierda a derecha y de arriba a abajo. ¿De cuántas maneras podemos ir desde A hasta B?

Una posible ruta sería DDDDDAAAA (se corresponde con bordear el rectángulo). Cualquier ruta es una cadena de 9 elementos con 5 D's y 4 A's. Así pues, la solución es:

$$PR(9; 5, 4) = \frac{9!}{5! 4!}$$

**Ejemplo 82.** La profesora de educación física de un colegio decide formar cuatro equipos de voleibol (A, B, C y D) de nueve niñas cada uno entre las 36 alumnas de primer curso. ¿De cuántas formas se pueden formar los cuatro equipos?

$$PR(36; 9, 9, 9, 9) = \frac{36!}{9! 9! 9! 9!}$$

## Combinaciones

Supongamos que entre cuatro alumnos; Antón, Brais, Carlos y Diego, queremos elegir una comisión de tres para asistir a una reunión. La comisión formada por Antón, Brais y Carlos es la misma que la formada por Carlos, Antón y Brais. El orden no importa, lo que importa es estar o no en la comisión, ¿Cuántas comisiones se pueden formar?

Sea  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  un conjunto finito de  $n$  elementos y sea  $r$  un número natural menor o igual que  $n$ . Una **combinación** (ordinaria o sin repetición) de los  $n$  elementos de  $A$  de orden  $r$  es un subconjunto (selección no ordenada) de  $r$  elementos distintos de  $A$ .

Dos combinaciones son diferentes si difieren en alguno de sus elementos.

**Teorema 13.** *El número de combinaciones de un conjunto de  $n$  elementos de orden  $r$  es*

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! (n-r)!}.$$

*Demostración.* De cada una de las  $C(n, r)$  posibles combinaciones se obtienen  $P(r) = r!$  variaciones distintas; las posibles ordenaciones de los  $r$  elementos seleccionados. Por el principio del producto

$$C(n, r) \cdot r! = V(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

despejando se obtiene la expresión. □

**Corolario 1.**

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r},$$

para todo  $0 \leq r \leq n$ .

**Ejemplo 83.** *¿De cuántas formas se pueden seleccionar cinco jugadores de un grupo de diez personas para formar un equipo?  $C(10, 5) = \binom{10}{5} = 252$ .*

**Ejemplo 84.** *Un estudiante debe realizar un examen de MD con diez preguntas de las que debe contestar siete. ¿Cuántos tipos diferentes de examen puede corregir el profesor? Si debe contestar tres de entre las cinco primeras y cuatro de entre las cinco últimas, ¿cuántos tipos posibles de examen hay en este caso? Lo mismo si en las especificaciones previas se dice que debe contestar al menos tres de entre las cinco primeras preguntas.*

En el primer caso son  $\binom{10}{7} = 120$ , en el segundo  $\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{4} = 10 \cdot 5 = 50$  y, en el tercero,  $\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{4} + \binom{5}{4} \cdot \binom{5}{3} + \binom{5}{2} = 50 + 50 + 10 = 110$ .

**Ejemplo 85.** *Elena quiere escoger cinco cartas de una baraja de póker (13 de cada palo: picas, tréboles, diamantes y corazones) ¿De cuántas formas puede hacerlo si quiere escoger al menos un trébol?*

Tiene  $\binom{52}{5} = 2598960$  formas de escoger las cinco cartas. De estas, las que no le interesan son aquellas en las que no hay tréboles que son  $\binom{39}{5} = 575757$ . Luego, la respuesta es  $2598960 - 575757 = 2023203$  posibles selecciones

**Ejemplo 86.** *Un profesor de Matemática Discreta cuenta cinco chistes cada mes. ¿Cuántos chistes diferentes debe conocer el profesor para que en un período de cuatro años no repita el mismo conjunto de cinco chistes?*

Necesitamos  $n$  para que  $C(n, 5)$  sea al menos 48 (número de meses en 4 años). Puesto que  $C(7, 5) = 21$  y  $C(8, 5) = 56$ , debe conocer al menos 8 chistes diferentes.

**Ejemplo 87.** *Un gimnasio abre todos los días de la semana y cada socio acude al menos tres días por semana. ¿Cuál es el mínimo número de socios que debe tener para garantizar que al menos dos de ellos coinciden los mismos días?*

Cada socio puede acudir 3, 4, 5, 6 o todos los días de la semana, lo que nos da un total de

$$\sum_{k=3}^7 \binom{7}{k} = 2^7 - \sum_{k=0}^2 \binom{7}{k} = 128 - 1 - 7 - 21 = 99$$

posibles selecciones de los días de la semana que acude cada socio. Si hay 100 socios, al menos dos coinciden los mismos días.

## Combinaciones con repetición

En una heladería disponen de 5 sabores diferentes para un helado. ¿De cuántas formas se pueden elegir 10 helados? En este ejemplo, se trata de combinaciones (no importa el orden de elección) pero es obvio que hemos de repetir sabor ya que  $n$  (5) es menor que  $r$  (10).

Sea  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  un conjunto finito de  $n$  elementos y sea  $r$  un número natural. Una **combinación con repetición** de los  $n$  elementos de  $A$  de orden  $r$  es una selección no ordenada de  $r$  elementos, no necesariamente distintos, de  $A$ .

Dos combinaciones con repetición de orden  $r$  son distintas si el número de apariciones de algún elemento de  $A$  en las selecciones es diferente. Por ejemplo, si  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  son combinaciones con repetición de orden tres diferentes  $\{1, 2, 3\}$  y  $\{1, 2, 4\}$ ,  $\{1, 2, 2\}$  y  $\{1, 1, 2\}$ . Sin embargo, son la misma combinación  $\{1, 2, 3\}$  y  $\{1, 3, 2\}$ , al igual que  $\{2, 1, 2\}$  y  $\{2, 2, 1\}$ .

**Teorema 14.** *El número de combinaciones con repetición de un conjunto de  $n$  elementos de orden  $r$  es*

$$CR(n, r) = C(n + r - 1, r) = \binom{n + r - 1}{r} = \binom{n + r - 1}{n - 1}.$$



*Demostración.* Cada combinación con repetición de orden  $r$  de los elementos de  $A$  se corresponde con una solución de

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = r,$$

siendo  $x_i$  el número de veces que elegimos el elemento  $i$ -ésimo. Así pues, estamos considerando únicamente soluciones  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  con  $x_i \in \mathbb{Z}$ ,  $x_i \geq 0$ , para cada  $i$ . Por otro lado, cada solución no negativa  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de la ecuación anterior se corresponde con una cadena de  $r$  1's y  $n - 1$  barras distribuidos como:

$$\overbrace{1 \dots 1}^{x_1} | \overbrace{1 \dots 1}^{x_2} | \dots | \overbrace{1 \dots 1}^{x_n}$$

Por lo tanto, buscamos el número de formas de colocar  $n - 1$  barras en  $n + r - 1$  posiciones<sup>2</sup>. Ese número es claramente  $\binom{n+r-1}{n-1} = \binom{n+r-1}{r}$ .  $\square$

**Ejemplo 88.** *En una gran cesta de frutas hay manzanas, naranjas, peras, fresas y plátanos. ¿De cuántas formas se puede hacer un batido con cuatro piezas de fruta?*  $CR(5, 4) = C(8, 4) = \binom{8}{4} = 70$ .

**Ejemplo 89.** *¿De cuántas formas se pueden colocar 12 bolas en cinco recipientes si a) cada bola es de un color diferente, b) todas las bolas son iguales?*

Si los objetos son todos diferentes, para cada objeto tenemos 5 elecciones posibles (los cinco recipientes), luego hay  $5^{12}$  posibilidades; son cadenas ordenadas de longitud 12 formadas con 1, 2, 3, 4 y 5, es decir  $VR(5, 12)$ .

Si las bolas son iguales, lo que interesa es saber cuántas bolas habrá en cada recipiente, es decir, el número de soluciones enteras positivas de

$$x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 12,$$

que es  $CR(5, 12) = \binom{16}{12} = \binom{16}{4} = 1820$ .

**Ejemplo 90.** *¿De cuántas formas se pueden elegir 11 helados entre cinco sabores si queremos que haya al menos un helado de cada sabor?*

Empezamos sirviendo cinco helados, uno de cada sabor<sup>3</sup>. Quedan por servir 6 helados con 5 sabores, lo cual equivale a encontrar las soluciones enteras no negativas de

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6,$$

<sup>2</sup>Pensemos en  $n = 3$  y  $r = 5$ . La solución  $1+2+2 = 5$  se corresponde con la combinación  $a_1 a_2 a_2 a_3 a_3$  y con la cadena  $1 | 11 | 11$ . A su vez, la cadena  $111 | 1 | 1$  se corresponde con la solución  $3+1+1 = 5$  y con la combinación  $a_1 a_1 a_1 a_2 a_3$ . ¿Con qué cadenas se corresponden las combinaciones  $a_1 a_1 a_1 a_1 a_1$  y  $a_2 a_2 a_3 a_3 a_3$ ?

<sup>3</sup>Es como introducir una bola en cada caja para que ninguna quede vacía.



que son

$$CR(5, 6) = \binom{10}{6} = \binom{10}{4} = 210.$$

El siguiente cuadro resume las fórmulas para las agrupaciones vistas

$r$ objetos entre $n$	Ordenadas	No Ordenadas
Sin repetición	$V(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$	$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
Con repetición	$VR(n, r) = n^r$	$CR(n, r) = \binom{n+r-1}{n-1}$

### 4.3. Binomios y Multinomios

**Teorema 15. Binomio de Newton.** Sean  $x, y$  dos variables y  $n$  un número natural, se tiene que

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k$$

*Demostración.*

$$(x + y)^n = (x + y) \cdot (x + y) \cdot \dots \cdot (x + y)$$

Para cada valor de  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , el coeficiente de  $x^k \cdot y^{n-k}$  coincide con el número de formas de seleccionar la variable  $x$  en  $k$  de los  $n$  factores (seleccionando la variable  $y$  en los  $n - k$  restantes) sin importar el orden ni repetir factor. Esto es, puede realizarse de  $C(n, k) = \binom{n}{k}$  formas. Por tanto

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}$$

La segunda igualdad se tiene porque  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$  para todo  $k = 0, 1, \dots, n$ . □

**Corolario 2.**

- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$
- $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

*Demostración.* Basta tomar en el teorema anterior  $x = y = 1$  en la primera igualdad y  $x = 1$  y  $y = -1$  en la segunda. □



**Ejemplo 91.** *Casos particulares son las fórmulas*

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2; \\(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3; \\(x+y)^7 &= \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} x^k y^{7-k} = \\&= \binom{7}{0} x^7 + \binom{7}{1} x^6 y + \binom{7}{2} x^5 y^2 + \binom{7}{3} x^4 y^3 + \\&+ \binom{7}{4} x^3 y^4 + \binom{7}{5} x^2 y^5 + \binom{7}{6} x y^6 + \binom{7}{7} y^7 = \\&= x^7 + 7x^6 y + 21x^5 y^2 + 35x^4 y^3 + 35x^3 y^4 + 21x^2 y^5 + 7x y^6 + y^7.\end{aligned}$$

**Ejemplo 92.** *Halla el coeficiente de  $x^9 y^3$  en  $(2x - 3y)^{12}$ . ¿Cuál es la suma de todos los coeficientes?*

Según acabamos de ver

$$(2x - 3y)^{12} = \sum_{i=0}^{12} \binom{12}{i} (2x)^i (-3y)^{12-i}$$

Por lo tanto, el coeficiente que nos piden aparece en el sumando correspondiente a  $i = 9$ :

$$\binom{12}{9} 2^9 x^9 (-3)^3 y^3 = 220 \cdot 512 \cdot (-27) x^9 y^3 = -3041280 x^9 y^3$$

Por otro lado, la suma de los coeficientes

$$\sum_{i=0}^{12} \binom{12}{i} 2^i (-3)^{12-i}$$

se obtiene tomando  $x = y = 1$  en  $(2x - 3y)^{12}$ , es decir

$$\sum_{i=0}^{12} \binom{12}{i} 2^i (-3)^{12-i} = (-1)^{12} = 1.$$

**Teorema 16. Multinomio de Leibniz.** *Sean  $x_1, x_2, \dots, x_k$  variables y sea  $n$  un número natural.*

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} PR(n; n_1, n_2, \dots, n_k) x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \dots \cdot x_k^{n_k}$$

*siendo  $n_1, n_2, \dots, n_k$  números naturales.*



*Demostración.*

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = (x_1 + x_2 + \dots + x_k) \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_k) \cdot \dots \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_k)$$

El coeficiente de  $x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \dots \cdot x_k^{n_k}$  coincide con el número de formas de seleccionar en los  $n$  factores,  $n_1$  veces la variable  $x_1$ ,  $n_2$  veces la variable  $x_2$ , y sucesivamente hasta  $n_k$  veces la variable  $x_k$ . Esto se puede realizar de  $PR(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$  formas, obteniéndose la expresión.  $\square$

**Ejemplo 93.**

$$(x + y + z)^{10} = \sum_{r+s+t=10} PR(10; r, s, t) x^r y^s z^t = \sum_{r+s+t=10} \frac{10!}{r! s! t!} x^r y^s z^t$$

**Ejemplo 94.** *Halla el coeficiente de  $w^3 x^2 y z^2$  en  $(2w - x + 3y - 2z)^8$ . ¿Cuál es la suma de todos los coeficientes?*

Según acabamos de ver

$$(2w - x + 3y - 2z)^8 = \sum_{i+j+k+r=8} \frac{8!}{i! j! k! r!} (2w)^i (-x)^j (3y)^k (-2z)^r$$

Por lo tanto, el coeficiente que nos piden aparece en el sumando correspondiente a  $i = 3, j = 2, k = 1, r = 2$ :

$$\frac{8!}{3! 2! 1! 2!} (2w)^3 (-x)^2 (3y)^1 (-2z)^2 = 161280 w^3 x^2 y z^2.$$

Por otro lado, la suma de los coeficientes

$$\sum_{i+j+k+r=8} \frac{8!}{i! j! k! r!} 2^i (-1)^j 3^k (-2)^r$$

se obtiene tomando  $w = x = y = z = 1$  en  $(2w - x + 3y - 2z)^8$ , es decir

$$\sum_{i+j+k+r=8} \frac{8!}{i! j! k! r!} 2^i (-1)^j 3^k (-2)^r = (2 - 1 + 3 - 2)^8 = 2^8 = 256.$$

## 4.4. Principio de inclusión-exclusión

En su forma más simple, el principio dice que si  $A$  y  $B$  son dos conjuntos finitos, entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$



En efecto, los elementos que pertenecen a ambos conjuntos se cuentan dos veces, una en el cardinal de  $A$  y otra en el cardinal de  $B$ . Para evitar esto se resta el número de elementos de  $A \cap B$ . Para el caso de tres conjuntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  el principio es

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|) + |A \cap B \cap C|.$$

Veamos la generalización de estas fórmulas para obtener el cardinal de una unión finita de conjuntos. Sea  $S$  un conjunto finito y  $P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , una colección de propiedades sobre los elementos de  $S$ . Se definen los subconjuntos  $S_i$  de  $S$

$$S_i = \{x \in S ; x \text{ verifica la propiedad } P_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

El conjunto

$$\bigcup_{i=1}^n S_i = \{x \in S ; x \text{ verifica alguna propiedad } P_i\};$$

por otra parte, el conjunto

$$\bigcap_{i=1}^n \overline{S_i} = \{x \in S ; x \text{ no verifica ninguna propiedad } P_i\}$$

siendo uno el complementario del otro:  $\overline{\bigcup_{i=1}^n S_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{S_i}$ .

**Teorema 17.** I)

$$\begin{aligned} \left| \bigcap_{i=1}^n \overline{S_i} \right| &= |S| - \sum_{i=1}^n |S_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |S_i \cap S_j| + \dots + (-1)^n |S_1 \cap \dots \cap S_n| = \\ &= |S| + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \dots \cap S_{i_k}|. \end{aligned}$$

II)

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n S_i \right| &= \sum_{i=1}^n |S_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |S_i \cap S_j| + \dots + (-1)^{n-1} |S_1 \cap \dots \cap S_n| = \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \dots \cap S_{i_k}|. \end{aligned}$$



*Demostración.* Nótese que ambas son equivalentes ya que

$$\left| \bigcap_{i=1}^n \overline{S}_i \right| = |S| - \left| \bigcup_{i=1}^n S_i \right|$$

Para probar la primera igualdad tomemos cualquier elemento  $x \in S$  y veamos que  $x$  se “cuenta” tantas veces a la izquierda de la igualdad como a la derecha. Distinguiamos dos casos:

- $x$  no satisface ninguna de las propiedades  $P_i$ , es decir  $x \in \bigcap_{i=1}^n \overline{S}_i$  y contribuye con un 1 en la parte izquierda. Por otro lado,  $x \in S$  pero  $x \notin S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_k}$ , para todos  $i_1 < \cdots < i_k$  y para todo  $k$ . Luego  $x$  también se cuenta una vez en el segundo miembro de la igualdad.
- $x$  satisface  $m$  de las  $n$  propiedades ( $m \leq n$ ), es decir  $x$  pertenece a  $m$  de los  $n$  conjuntos  $S_i$ . Como  $x$  no pertenece a  $\bigcap_{i=1}^n \overline{S}_i$ ,  $x$  contribuye con 0 en la parte de la izquierda de la igualdad. En la parte derecha  $x$  contribuye 1 en  $|S|$ , con  $m$  en el sumando  $\sum_{i=1}^n |S_i|$ , una vez en cada conjunto al que pertenece. En general, para cada natural  $k$ ,  $1 \leq k \leq m$ ,  $x$  pertenece a  $\binom{m}{k}$  intersecciones del tipo  $S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_k}$ , las posibles combinaciones de orden  $k$  de los  $m$  conjuntos. Para valores de  $k$  mayores que  $m$ ,  $x$  no pertenece a ninguna de las intersecciones. Por todo ello,  $x$  contribuye con

$$1 + \sum_{k=1}^m (-1)^k \binom{m}{k} = (1 + (-1))^m = 0.$$

en la parte derecha de la igualdad.

□

**Ejemplo 95.** ¿De cuántas formas se pueden repartir 12 bolas distintas en cinco cajas de manera que ninguna caja quede vacía?

Llamemos  $S$  al conjunto de maneras de repartir 12 bolas distintas en cinco cajas distintas. Es claro que el cardinal de  $S$  es  $5^{12}$ . Si ahora

$$S_i = \{x \in S ; \text{ la caja } i \text{ queda vacía}\}$$

nos piden el cardinal de

$$\bigcap_{i=1}^n \overline{S}_i$$

En primer lugar,  $|S_i| = 4^{12}$  ya que se trata de repartir 12 bolas distintas en 4 cajas (todas menos la  $i$ -ésima). Análogamente  $|S_i \cap S_j| = 3^{12}$ ,  $|S_i \cap S_j \cap S_k| = 2^{12}$ ,  $|S_i \cap S_j \cap S_k \cap S_r| = 1$  y  $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \cap S_5 = \emptyset$ . Resumiendo, nos quedan

$$\left| \bigcap_{i=1}^n \overline{S_i} \right| = 5^{12} - 5 \cdot 4^{12} + 10 \cdot 3^{12} - 10 \cdot 2^{12} + 5 = 165528000$$

formas de repartir 12 bolas en cinco cajas sin que ninguna quede vacía.

**Ejemplo 96.** *Una madre quiere repartir 11 pasteles iguales entre sus cuatro hijos de manera que cada uno reciba al menos un pastel y no más de tres, ¿cuántas posibilidades tiene para hacerlo?*

Se trata de resolver la ecuación:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$$

con  $1 \leq x_i \leq 3$ . Comenzamos dándole a cada niño un pastel<sup>4</sup>, con lo que ahora tenemos que resolver

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7$$

donde  $0 \leq y_i \leq 2$ . Llamemos  $S$  al conjunto de soluciones con  $y_i \geq 0$ , para todo  $i$ . Sabemos que  $|S| = \binom{10}{7} = 120$ . Si ahora cada

$$S_i = \{y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in S ; y_i \geq 3\},$$

nos queda  $|S_i| = CR(4, 4) = \binom{7}{4} = 35$ ,  $|S_i \cap S_j| = CR(4, 1) = \binom{4}{1} = 4$ . Por lo tanto, la madre puede repartir los pasteles de

$$\binom{10}{7} - 4 \cdot \binom{7}{4} + 6 \cdot \binom{4}{1} = 120 - 4 \cdot 35 + 6 \cdot 4 = 144 - 140 = 4$$

formas, que se corresponden con  $2+3+3+3 = 3+2+3+3 = 3+3+2+3 = 3+3+3+2 = 11$

**Ejemplo 97.** *¿Cuántas aplicaciones sobreyectivas se pueden definir del conjunto  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$  de  $m$  elementos en el conjunto  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  de  $n$  elementos?*

<sup>4</sup>o sea haciendo el cambio de variable  $y_i = x_i - 1$



Llamamos  $S$  al conjunto de aplicaciones de  $A$  en  $B$  y

$$S_i = \{f : A \rightarrow B ; f^{-1}(y_i) = \emptyset\},$$

para cada  $i = 1, \dots, n$ . Razonando como en los ejemplos anteriores nos queda que el número buscado es

$$\left| \bigcap_{i=1}^n \overline{S_i} \right| = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m.$$

**Ejemplo 98.** ¿De cuántas formas pueden ordenarse 3 bolas rojas, 3 azules y 2 blancas de modo que no todas las bolas del mismo color queden consecutivas?

Sea ahora  $S$  el conjunto de maneras de ordenar las 8 bolas. Sabemos que

$$|S| = \frac{8!}{3!3!2!} = 560.$$

Si llamamos

$$\begin{aligned} S_1 &= \{x \in S ; \text{ las tres bolas rojas quedan juntas} \} \\ S_2 &= \{x \in S ; \text{ las tres bolas azules quedan juntas} \} \\ S_3 &= \{x \in S ; \text{ las dos bolas blancas quedan juntas} \} \end{aligned}$$

Para calcular el cardinal de  $\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3}$ , hay que tener en cuenta que el papel de  $S_1$  y  $S_2$  es simétrico, por lo que

$$|S_1| = |S_2| = \frac{6!}{3!2!} = 60$$

ya que hemos de ordenar un bloque de bolas rojas (o azules), 3 bolas azules (o rojas) y 2 bolas blancas. Análogamente

$$|S_3| = \frac{7!}{3!3!} = 140$$

$$|S_1 \cap S_2| = \frac{4!}{2!} = 12 ; |S_1 \cap S_3| = |S_2 \cap S_3| = \frac{5!}{3!} = 20 \text{ y } |S_1 \cap S_2 \cap S_3| = 3! = 6.$$

Resumiendo, nos quedan

$$|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3}| = 560 - (60 + 60 + 140) + (12 + 20 + 20) - 6 = 560 - 260 + 52 - 6 = 346$$

formas de ordenar las bolas sin que queden todas las del mismo color juntas.



**Ejemplo 99.** ¿Cuántos números enteros entre 1 y 10000 son múltiplos de 2 o de 3 o de 5?

$$S = \{x \in \mathbb{N}; 1 \leq x \leq 10000\}$$

$$S_1 = \{x \in S; 2 \text{ divide a } x\}$$

$$S_2 = \{x \in S; 3 \text{ divide a } x\}$$

$$S_3 = \{x \in S; 5 \text{ divide a } x\}$$

$$|S_1 \cup S_2 \cup S_3| = |S_1| + |S_2| + |S_3| - (|S_1 \cap S_2| + |S_1 \cap S_3| + |S_2 \cap S_3|) + |S_1 \cap S_2 \cap S_3|$$

$$|S_1| = 5000, |S_2| = 3333, |S_3| = 2000.$$

$$|S_1 \cap S_2| = 1666, |S_1 \cap S_3| = 1000, |S_2 \cap S_3| = 666.$$

$$|S_1 \cap S_2 \cap S_3| = 333.$$

$$\text{Por tanto } |S_1 \cup S_2 \cup S_3| = 7334.$$

## Desórdenes

Un desorden es una permutación de un conjunto finito en la cual ningún elemento es la imagen de sí mismo; en otras palabras, una permutación que no deja a ningún elemento en su posición original. Supongamos que 5 personas dejan sus abrigos en el guardarropa de un restaurante. ¿De cuántas formas se le pueden devolver los abrigos si se sabe que ninguno de ellos recibirá el suyo? Si llamamos

$$S = \{\text{formas de ordenar 5 abrigos}\}$$

y

$$S_i = \{x \in S; \text{ la persona } i\text{-ésima recibe su abrigo}\}$$

lo que queremos calcular es el cardinal de

$$\bigcap_{i=1}^5 \overline{S_i} = |S| + \sum_{k=1}^5 (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq 5} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \dots \cap S_{i_k}|.$$

Es claro que  $|S| = 5!$ ,  $|S_i| = 4!$  y, en general,  $|S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \dots \cap S_{i_k}| = (5 - k)!$ , para cada  $1 \leq k \leq 5$ . Así que la respuesta es:

$$5! - 5 \cdot 4! + \binom{5}{2} \cdot 3! - \binom{5}{3} \cdot 2! + \binom{5}{4} \cdot 1! - 1 = 120 - 120 + 60 - 20 + 5 - 1 = 44.$$

Generalizando el razonamiento anterior, el número de desórdenes de un conjunto de  $n$  elementos es:

$$d(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n - k)! = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

**Ejemplo 100.** *Supongamos que cinco personas dejan su abrigo y su paraguas en el guardarropa. ¿De cuántas formas se le pueden devolver las prendas si cada una de ellas no recibe ni su abrigo ni su paraguas? ¿Y si cada una no recibe alguna de las dos prendas?*

En el primer caso, tenemos  $d(5) = 44$  formas de desordenar 5 paraguas y  $d(5)$  formas de desordenar 5 abrigos, lo que hacen un total de  $d(5) \cdot d(5) = 44 \cdot 44 = 1936$ . En el segundo caso, queremos que cada persona reciba o bien un paraguas, o bien un abrigo, que no sean los suyos. Sea entonces  $S$  el conjunto de formas de repartir los 5 paraguas y los 5 abrigos y, para cada  $i$ , denotemos

$$S_i = \{x \in S ; \text{ la persona } i \text{ recibe su abrigo y su paraguas}\}.$$

De este modo, lo que nos piden es el cardinal de

$$\bigcap_{i=1}^5 \overline{S_i}$$

Ahora bien,  $|S| = 5! \cdot 5!$  y, para cada  $1 \leq k \leq 5$ , si consideramos  $S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \dots \cap S_{i_k}$ , vemos que está formado por todas las maneras de repartir los abrigos y los paraguas de modo que las personas  $i_1, i_2, \dots, i_k$  reciban sus dos prendas, por lo que, se trata de contar las formas de repartir los  $5 - k$  abrigos y los  $5 - k$  paraguas. Por lo tanto, el cardinal pedido es

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^5 \overline{S_i} &= \sum_{k=0}^5 (-1)^k \cdot \binom{5}{k} \cdot (5-k)! \cdot (5-k)! = \\ &= 5! \cdot 5! - 5 \cdot 4! \cdot 4! + \binom{5}{2} \cdot 3! \cdot 3! - \binom{5}{3} \cdot 2! \cdot 2! + \binom{5}{4} \cdot 1! \cdot 1! - 1 = \\ &= 11844 \end{aligned}$$

