TEMA 3:
CIRCUITOS ELÉCTRICOS EN ALTERNA

3.1 FORMAS DE ONDA PERIÓDICAS.VALORES FUNDAMENTALES

3.1.1. Señales periódicas

Llamamos **señal** a una magnitud física (tensión, corriente, etc.) que varía con el tiempo y que representamos por **x(t)**. Según sea esta variación la señal puede ser:

- PERIÓDICA.

La señal repite periódicamente sus valores y por tanto podemos escribir que **x(t)= x(t+T)** donde **T** es el período o tiempo que tarda en repetir sus valores.

- NO PERIÓDICA

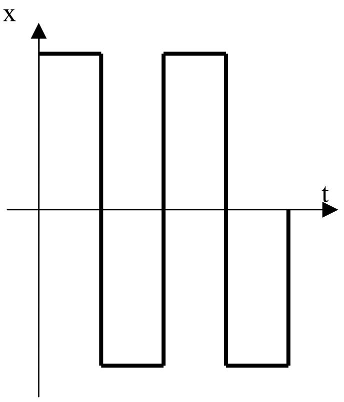
Nunca se encontrará un tiempo a partir del cual la señal se repite, o sea, **x(t)≠ x(t+T)**.

Una tensión o corriente continua, con esta definición, no sería una señal propiamente dicha, pero es habitual considerarla como un caso particular de aquélla y le llamaremos señal **continua**.

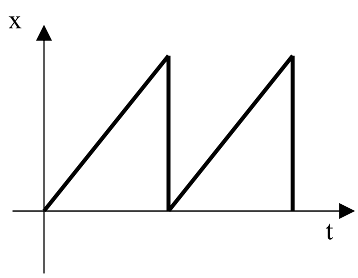
Una señal periódica puede ser:

- Alterna. Cuando toma alternativamente valores positivos y negativos. Como veremos al definir el valor medio o de continua, será cero para señales alternas puras.
- Compuesta. Cuando está formada por dos tipos de señales normalmente una de ellas continua.

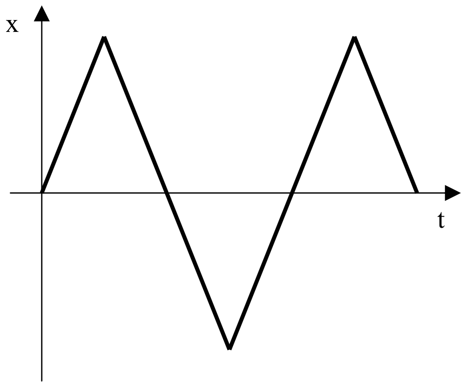
Dentro de las señales periódicas las más utilizadas son las siguientes:



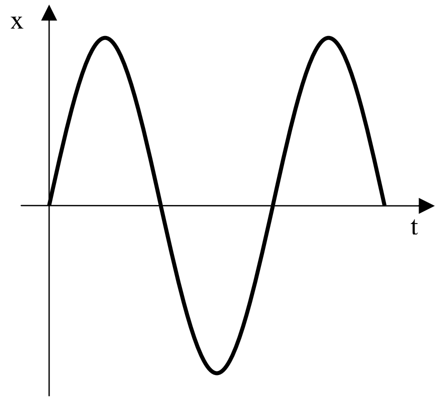
CUADRADA



DIENTE DE SIERRA

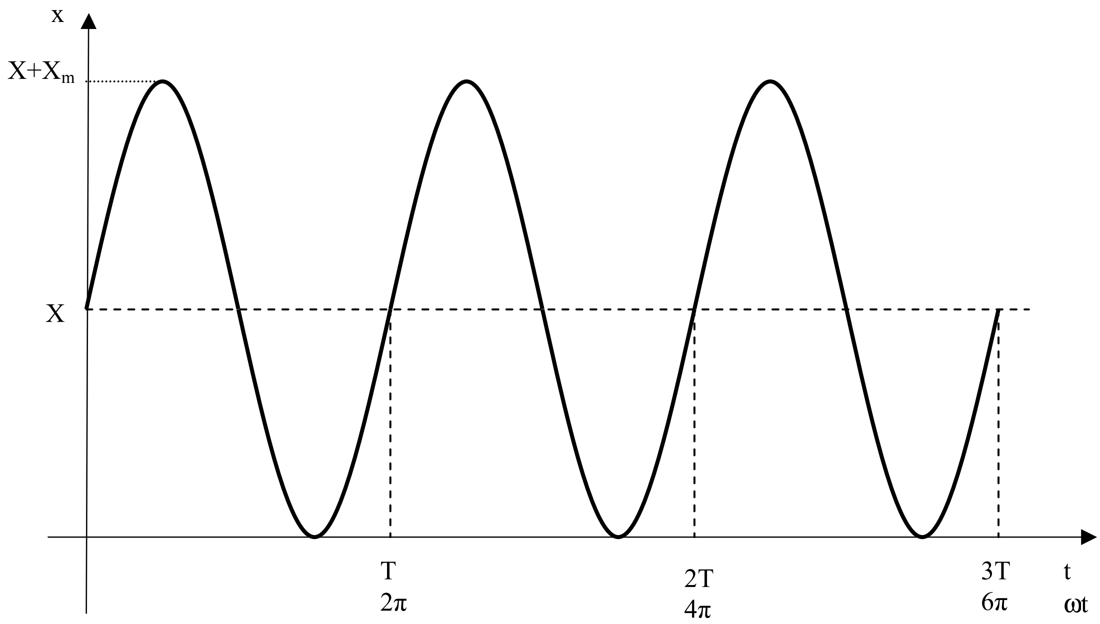


TRIANGULAR



SINUSOIDAL

Un ejemplo de señal compuesta sería $x = X + X_m \mathrm{sen}(\omega t)$ según figura:



3.1.2. Valores fundamentales

Los parámetros o características más importantes de las señales periódicas son:

VALOR INSTANTÁNEO: x(t). Es el valor que toma la señal en cada instante de tiempo.

PERÍODO: T. Es el tiempo que tarda la señal en repetirse. Es una medida de tiempo y se mide en segundos (s).

FRECUENCIA: f. Es el número de veces que se repite la señal por segundo. Por tanto podemos poner que $f = \frac{1}{T}$ y se mide en Hz (hercios) o s^{-1}.

AMPLITUD, VALOR MÁXIMO O DE PICO: X_m o X_p. Es del valor máximo que toma la señal.

VALOR DE RIZADO O DE PICO A PICO: X_{pp} . Es la diferencia entre valores extremos de la señal.

VALOR MEDIO O DE CONTINUA: X_{dc} o X_{med} . Representa el valor medio de los valores instantáneos en un período. Matemáticamente se obtiene hallando la media aritmética de los valores instantáneos que toma la señal durante un período:

$$x_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

VALOR EFICAZ O RMS: X_{ef} o X_{rms}. Equivale físicamente al valor de una corriente continua que disipa la misma potencia sobre una resistencia. Matemáticamente se obtiene hallando la raíz cuadrada de la media aritmética de los cuadrados de los valores instantáneos que toma la señal durante un período.

$$x_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt}$$

3.2 RÉGIMEN SINUSOIDAL

3.2.1 Señal sinusoidal

El análisis de los circuitos alimentados por generadores sinusoidales se hace necesario por varias razones de importancia.

1. Los generadores industriales (alternadores) son de fuerza electromotriz sinusoidal y, en definitiva, la red de suministro de energía eléctrica transporta corrientes que varían con el tiempo según esta función.
2. El estudio de la respuesta de los circuitos a la excitación sinusoidal nos permite conocer la respuesta a otro tipo de señales, puesto que cualquier señal se puede desarrollar en suma de componentes sinusoidales, y por superposición, la suma de las respuestas individuales nos da la respuesta global.
3. En los sistemas de comunicaciones mediante ondas electromagnéticas (radio, TV, satélite, etc.)se usan señales sinusoidales, Incluso las señales digitales son realmente impulsos de señales sinusoidales cuando son transmitidas por radio o sobre portadora, y cuando se estudian las comunicaciones en banda base, se tiene en cuenta su configuración mediante suma de señales sinusoidales.

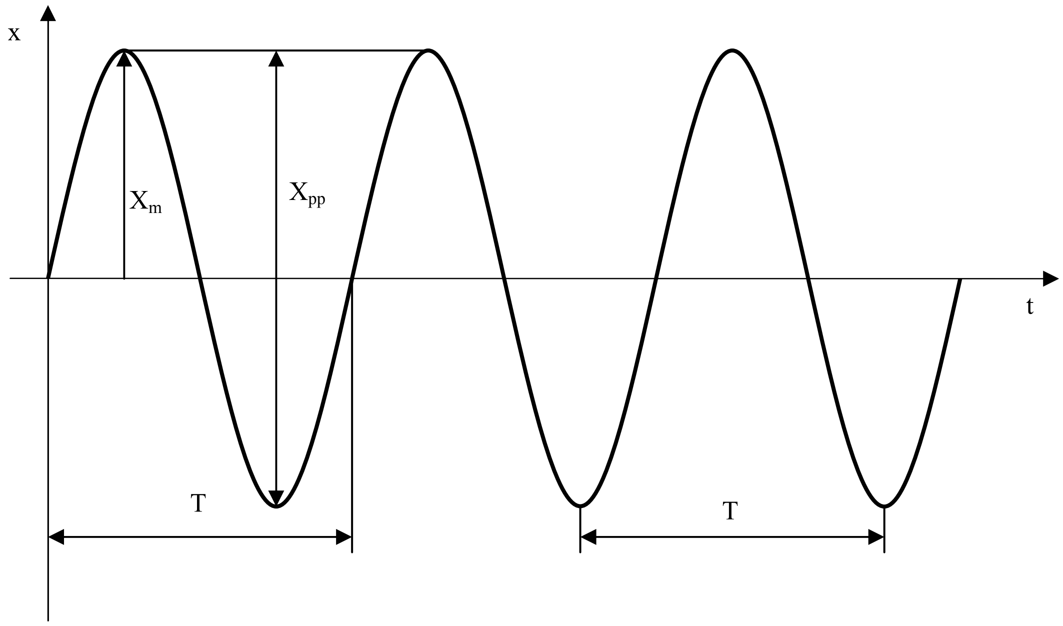
Una señal sinusoidal es una corriente o tensión que varía sinusoidalmente con el tiempo. Se puede expresar como una función seno o coseno. Por ejemplo:

x(t)= $X_m$sen(ωt) ó x(t)= $X_m$cos(ωt) si en t= 0 x(t) es 0 ó 1 respectivamente.

x(t)= $X_m$sen(ωt+φ) ó x(t)= $X_m$cos(ωt+φ) si en t= 0 x(t) es distinta de 0 ó 1.

Usaremos la función seno a partir de ahora, pero sin olvidar que todo el desarrollo que se realiza es igualmente válido usando la función coseno.

Una función senoidal de la forma x(t)= $X_m$sen(ωt) tendrá una representación gráfica como la de la figura:



VALOR INSTANTÁNEO: x(t)= $X_m$sen(ωt)

PERÍODO: T.

FRECUENCIA: $f = \dfrac{1}{T}$

FRECUENCIA ANGULAR O PULSACIÓN: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$. Se mide en rad/s y representa una velocidad angular, ya que la señal recorre un ángulo de 2π radianes cada período T.

VALOR MÁXIMO O DE PICO: Dado que la función seno está acotada entre ±1, ±X_m acota la amplitud de la señal.

VALOR DE PICO A PICO: Podemos poner que $X_{pp} = 2X_p$

DESFASAJE: φ. Es el ángulo de fase de la señal. Determina el valor de la señal en el instante t= 0. El cambio del ángulo de fase desplaza la señal a lo largo del eje de tiempo pero no afecta a la amplitud X_m ni a la frecuencia o pulsación ω. Una φ positiva desplaza la señal a la izquierda y una φ negativa a la derecha.

Los valores ωt y φ deben tener las mismas unidades ya sean grados o radianes. El desfasaje φ se suele expresar en grados y ωt en radianes, por ello hay que tener precaución al hacer operaciones de ponerlos en las mismas unidades.

VALOR MEDIO O DE CONTINUA: Como la señal toma alternativamente valores positivos y negativos este parámetro es 0 para una señal senoidal:

$$X_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T X_m sen\omega t dt = 0$$

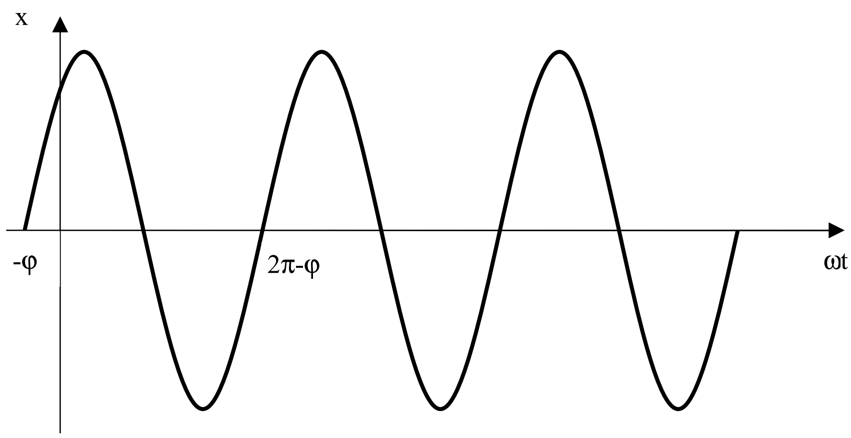
VALOR EFICAZ: Si aplicamos la definición de valor eficaz para una señal senoidal se obtiene:

$$X_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (X_m sen\omega t)^2 dt} = \sqrt{\frac{2}{T}\int_0^{T/2} (X_m sen\frac{2\pi}{T}t)^2 dt} = \frac{X_m}{\sqrt{2}}$$

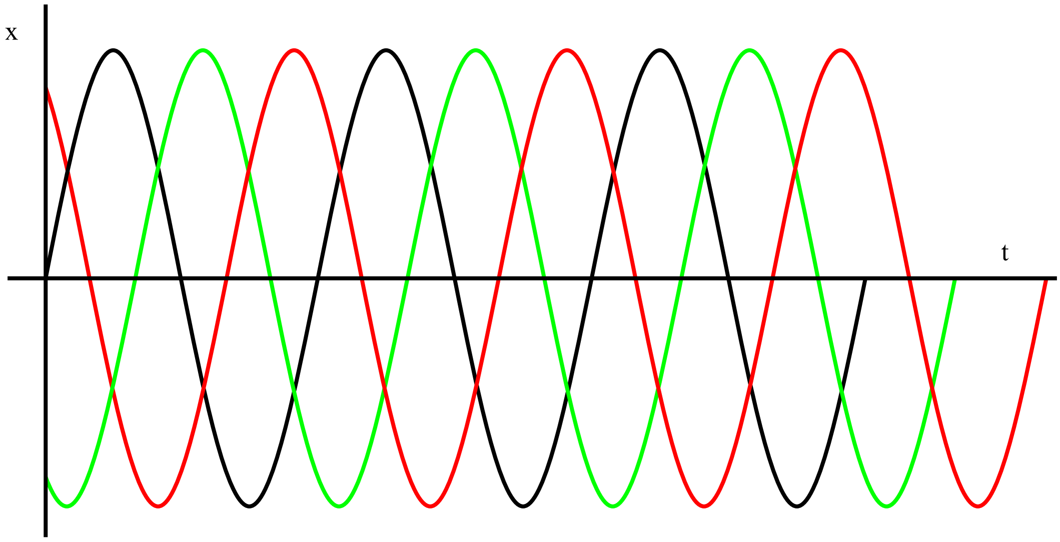
El valor eficaz depende solamente del valor máximo X_m siendo independiente de la frecuencia y la fase de la señal. Cuando hablamos de una señal sinusoidal y damos un valor de tensión sin más aclaraciones nos referimos al valor eficaz. Así decimos que en los enchufes de nuestra casa tenemos 230 V 50 Hz, correspondiendo al valor eficaz de la tensión y a la frecuencia respectivamente.

Una señal senoidal queda perfectametne definida si conocemos su amplitud (en valor máximo o eficaz), frecuencia y ángulo de desfase.

Una función senoidal de la forma $x(t)= X_m sen(\omega t+ \varphi)$ tendrá una representación gráfica como la de la figura:



Dos señales senoidales de la misma amplitud y frecuencia se pueden diferenciar por su fase. En el ejemplo siguiente podemos ver tres señales desfasadas 120º



3.2.2 Respuesta sinusoidal

La respuesta de un circuito a una señal sinusoidal se compone de dos términos:

a.- RESPUESTA TRANSITORIA. Suele ser de tipo exponencial decreciente y se extingue con el tiempo. Se produce al conectar o desconectar la energía al circuito.

b.- RESPUESTA PERMANENTE. Existe siempre que el generador esté conectado al circuito sin interrupción.

En el tema anterior se ha estudiado la respuesta transitoria para el circuito RC. En este tema nos centraremos exclusivamente en la respuesta de régimen permanente en alterna.

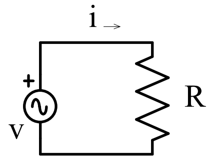
Es importante recordar las siguientes características de la solución de estado permanente, suponiendo componentes R, L y C constantes y que la fuente de excitación del circuito es sinusoidal:

- La solución de estado permanente también es sinusoidal
- La frecuencia de la señal de respuesta es la misma que la de la fuente
- La amplitud máxima de la respuesta, en general difiere de la de la fuente
- El ángulo de fase de la respuesta difiere del de la fuente

Por tanto podemos deducir que si solamente pretendemos obtener la respuesta permanente la tarea se reduce a determinar la amplitud y la fase de la señal de respuesta. LA FORMA DE ONDA Y LA FRECUENCIA YA SE CONOCEN.

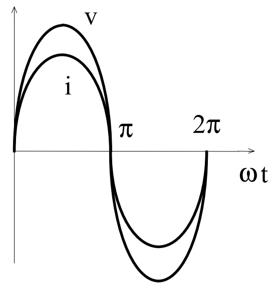
3.2.2.1 Resistencia en alterna

Consideremos una resistencia R entre bornes de un generador de tensión alterna:



$$v = V_p \text{ sen } \omega t$$

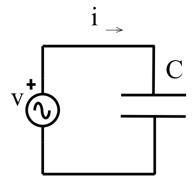
$$i = \frac{V_p}{R} \text{ sen } \omega t$$



En una resistencia la tensión y la intensidad de corriente están en fase y sus amplitudes relacionadas por la ley de Ohm: $I_p = V_p/R$.

3.2.2.2 Capacidad en alterna

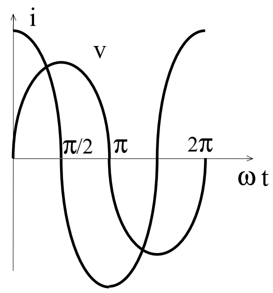
Consideremos una capacidad C entre bornes de una fuente de tensión alterna:



$$v = V_p \text{ sen } \omega t$$

$$q = Cv = CV_p \text{ sen } \omega t$$

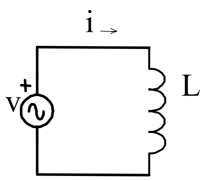
$$i = \frac{dq}{dt} = \omega C V_p \cos \omega t = \omega C V_p sen(\omega t + \frac{\pi}{2})$$



Por comparación con la resistencia se define $X_C = V_p/I_p = 1/\omega C$, como la ***reactancia capacitiva*** del condensador. Decimos entonces que en un condensador la corriente adelanta 90º a la tensión, y las amplitudes de ambas están relacionadas a través de su reactancia, o sea, $I_p = V_p/X_C$. Dado que la reactancia es un cociente entre una tensión y una intensidad de corriente, se mide en ohmios (Ω) igual que la resistencia.

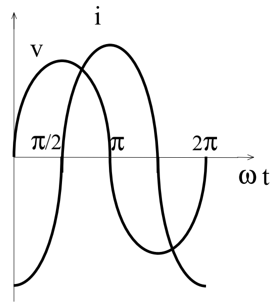
3.2.2.3 Inductancia en alterna

Conectamos la fuente de tensión alterna a una bobina de inductancia L, se tiene:



$$v = V_p sen \omega t$$

$$v = \frac{d\phi}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

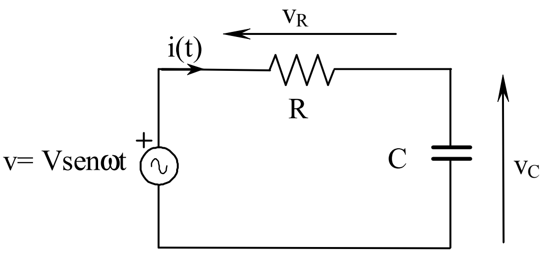


$$i = \frac{1}{L}\int v dt = \frac{1}{L}\int V_p sen \omega t dt == -\frac{V_p}{\omega L}\cos \omega t = \frac{V_p}{\omega L} sen(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

Se define $X_L = V_p/I_p = \omega L$ como la ***reactancia inductiva*** de la bobina. Decimos que en una inductancia la corriente va retrasada 90º con respecto a la tensión, y las amplitudes de ambas están relacionadas a través de su reactancia: $I_p = V_p/X_L$.

3.3 CIRCUITO RC EN ALTERNA

Para el análisis en régimen permanente en alterna de este circuito, vamos a utilizar las relaciones de tensión y de corriente que conocemos para los elementos R y C básicos, y las leyes de Kirchhoff.



El circuito RC de la figura se encuentra excitado por un generador ideal de tensión de señal sinusoidal: v= Vsenωt.

La intensidad de corriente i(t) que circula proporciona caídas de potencial en R y C que vienen dadas por:

$$v_R = iR \qquad v_C = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C}\int idt$$

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff:

$$v = v_R + v_C = iR + \frac{1}{C}\int idt$$

ecuación integral que podemos convertir a diferencial derivando con respecto a t:

$$\frac{dv}{dt} = R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden no homogénea.

Nos interesa obtener la solución i(t) de régimen permanente que conocemos como respuesta forzada o solución particular. La linealidad del circuito nos indica que la respuesta (forzada) es una señal del mismo tipo que la excitación, es decir, una señal sinusoidal. Por tanto podemos escribirla de modo genérico en función de dos coeficientes A y B:

$$i(t) = Asen\omega t + B\cos\omega t$$

coeficientes que habrá que determinar sustituyendo esta solución en la ecuación diferencial. Dado que:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(Vsen\omega t) = V\omega\cos\omega t$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}(Asen\omega t + B\cos\omega t) = A\omega\cos\omega t - B\omega sen\omega t$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene:

$$V\omega\cos\omega t = AR\omega\cos\omega t - BR\omega sen\omega t + \frac{A}{C}sen\omega t + \frac{B}{C}\cos\omega t \Rightarrow$$

$$V\omega\cos\omega t = \left(AR\omega + \frac{B}{C}\right)\cos\omega t + \left(\frac{A}{C} - BR\omega\right)sen\omega t$$

Esta relación es válida para todos los valores de t sólo si:

$$\left\{\begin{array}{l} V\omega = AR\omega + \dfrac{B}{C} \\ \dfrac{A}{C} - BR\omega = 0 \end{array}\right\} \text{de donde se obtiene:} \left\{\begin{array}{l} A = \dfrac{\omega^2 RC^2 V}{1+\omega^2 R^2 C^2} \\ B = \dfrac{\omega CV}{1+\omega^2 R^2 C^2} \end{array}\right\}$$

Podemos escribir i(t) como una única función sinusoidal de amplitud I y con un cierto desfasaje φ, según:

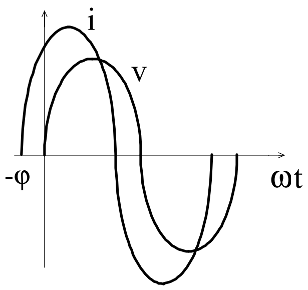
$$i(t) = Asen\omega t + B\cos\omega t = Isen(\omega t - \varphi) = Isen\omega t\cos\varphi - I\cos\omega t sen\varphi$$

de donde se deduce:

$$\begin{Bmatrix} A = I\cos\varphi \\ B = -Isen\varphi \end{Bmatrix} \text{ y entonces sustituyendo A y B: } \begin{Bmatrix} I = \sqrt{A^2 + B^2} = \dfrac{V}{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}} \\ \varphi = arctg\dfrac{B}{A} = -arctg\dfrac{1}{\omega RC} \end{Bmatrix}$$

Y la respuesta forzada es:

$$i(t) = Isen(\omega t - \varphi) = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}} sen\left(\omega t + arctg\frac{1}{\omega RC}\right)$$



El término $\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}$ que relaciona las amplitudes de V e I se conoce como módulo o magnitud de la impedancia Z del circuito RC.

Se observa que la corriente en un circuito RC adelanta a la tensión un ángulo $\varphi = arctg\dfrac{1}{\omega RC}$

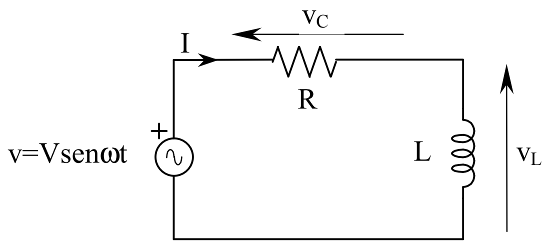
Las tensiones en R y C vienen dadas por:

$$v_R = iR = \frac{VR}{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}} sen\left(\omega t + arctg\frac{1}{\omega RC}\right)$$

$$v_C = \frac{1}{C}\int idt = \frac{-V}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}\cos\left(\omega t + arctg\frac{1}{\omega RC}\right) = \frac{V}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} sen\left(\omega t + arctg\frac{1}{\omega RC} - \frac{\pi}{2}\right)$$

3.4 CIRCUITO RL EN ALTERNA

Para el análisis en régimen permanente en alterna de este circuito, vamos a utilizar las relaciones de tensión y de corriente que conocemos para los elementos R y L básicos, y las leyes de Kirchhoff.



El circuito RL de la figura se encuentra excitado por un generador ideal de tensión de señal sinusoidal: v= Vsenωt.

La intensidad de corriente i(t) que circula proporciona caídas de potencial en R y L que vienen dadas por:

$$v_R = iR \qquad v_L = L\frac{di}{dt}$$

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff:

$$v = v_R + v_L = iR + L\frac{di}{dt}$$

ecuación diferencial lineal de primer orden no homogénea.

Nos interesa obtener la solución i(t) de régimen permanente que conocemos como respuesta forzada o solución particular. La linealidad del circuito nos indica que la respuesta (forzada) es una señal del mismo tipo que la excitación, es decir, una señal sinusoidal. Por tanto podemos escribirla de modo genérico en función de dos coeficientes A y B:

$$i(t) = Asen\omega t + B\cos\omega t$$

coeficientes que habrá que determinar sustituyendo esta solución en la ecuación diferencial. Dado que:

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}(Asen\omega t + B\cos\omega t) = A\omega\cos\omega t - B\omega sen\omega t$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene:

$$Vsen\omega t = ARsen\omega t + BR\cos\omega t + A\omega L\cos\omega t - B\omega Lsen\omega t \Rightarrow$$
$$Vsen\omega t = (AR - B\omega L)sen\omega t + (BR + A\omega L)\cos\omega t$$

Esta relación es válida para todos los valores de t sólo si:

$$\begin{Bmatrix} V = AR - B\omega L \\ 0 = BR + A\omega L \end{Bmatrix} \text{ de donde se obtiene: } \begin{Bmatrix} A = \dfrac{VR}{R^2 + \omega^2 L^2} \\ B = -\dfrac{\omega L V}{R^2 + \omega^2 L^2} \end{Bmatrix}$$

Podemos escribir i(t) como una única función sinusoidal de amplitud I y con un cierto desfasaje φ, según:

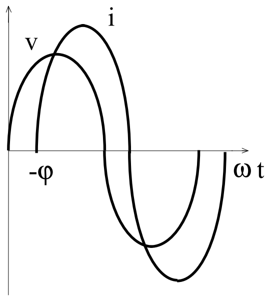
$$i(t) = Asen\omega t + B\cos\omega t = Isen(\omega t - \varphi) = Isen\omega t\cos\varphi - I\cos\omega t sen\varphi$$

de donde se deduce:

$$\begin{Bmatrix} A = I\cos\varphi \\ B = -Isen\varphi \end{Bmatrix} \text{ y entonces sustituyendo A y B: } \begin{Bmatrix} I = \sqrt{A^2 + B^2} = \dfrac{V}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \\ \varphi = arctg\dfrac{B}{A} = arctg(\dfrac{\omega L}{R}) \end{Bmatrix}$$

Y la respuesta forzada es:

$$i(t) = Isen(\omega t - \varphi) = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} sen\left(\omega t - arctg\frac{\omega L}{R}\right)$$



El término $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ que relaciona las amplitudes de V e I se conoce como módulo o magnitud de la impedancia Z del circuito RL.

Se observa que la corriente en un circuito RL retrasa a la tensión un ángulo $\varphi = arctg\frac{\omega L}{R}$

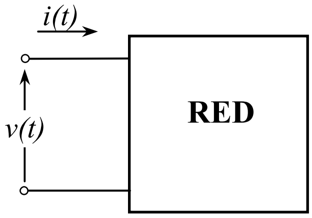
Las tensiones en R y L vienen dadas por:

$$v_R = iR = \frac{VR}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} sen\left(\omega t - arctg\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$v_L = L\frac{di}{dt} = \frac{\omega L V}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - arctg\frac{\omega L}{R}\right) = \frac{\omega L V}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} sen\left(\omega t - arctg\frac{\omega L}{R} + \frac{\pi}{2}\right)$$

3.5 POTENCIA EN ALTERNA

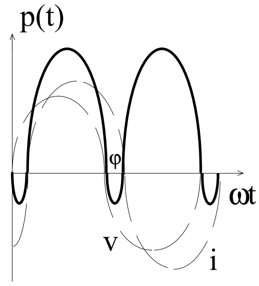
La potencia instantánea absorbida por un circuito, entre dos terminales cualesquiera, es:



$$p(t) = \frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dq}\frac{dq}{dt} = v(t)\,.\,i(t)$$

Para valores instantáneos correspondientes a señales alternas sinusoidales genéricas, del tipo:

$$v(t) = \mathrm{V}_o sen(\omega t + \varphi_V) \quad ,, \quad i(t) = \mathrm{I}_o sen(\omega t + \varphi_I)$$



Resulta, para la potencia instantánea:

$$p(t) = \mathrm{V}_o\ \mathrm{I}_o sen(\omega t + \varphi_V) sen(\omega t + \varphi_I) =$$
$$= \frac{\mathrm{V}_o\ \mathrm{I}_o}{2}\left[\cos(\varphi_V - \varphi_I) - \cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I)\right]$$

Observamos que la potencia instantánea viene dada por un valor constante sobre el que se superpone un término variable con el tiempo según una sinusoide de frecuencia doble (2ω).

Al hablar de potencia en un circuito de corriente alterna, ha de entenderse que se refiere a la ***Potencia media*** o ***Potencia activa***:

$$\mathrm{P} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \frac{\mathrm{V}_o\ \mathrm{I}_o}{2}\cos\varphi = \mathrm{V}_{ef}\ \mathrm{I}_{ef}\ \cos\varphi \quad \text{(W)}$$

que representa la potencia absorbida por el circuito que es disipada en calor en sus resistencias. Se mide en W(vatios).

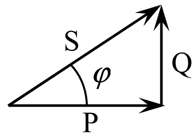
El factor $\cos\varphi = \cos(\varphi_V - \varphi_I)$ se conoce como ***Factor de potencia.***

Se definen otras potencias matemáticas o derivadas:

Potencia aparente: $\mathrm{S} = \mathrm{V}_{ef}\ \mathrm{I}_{ef}$, se mide en VA (volti-amperios).

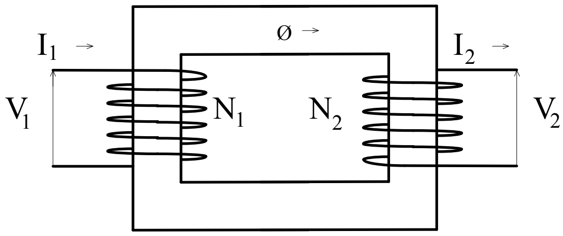
Potencia reactiva: $\mathrm{Q} = \mathrm{V}_{ef}\ \mathrm{I}_{ef}\ sen\varphi$, se mide en VAR (volti-amperios reactivos).

Se observa que S, P y Q forman un triángulo rectángulo, que se denomina triángulo de potencias.



$$\mathrm{S}^2 = \mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 \quad ,, \quad tg\varphi = \mathrm{Q}/\mathrm{P}$$

3.6 EL TRANSFORMADOR IDEAL



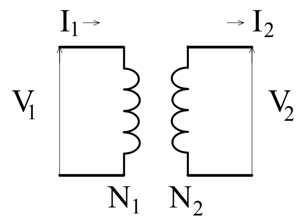
Un transformador está constituido por un núcleo sobre el cual se encuentran dos bobinados de N_1 y N_2 espiras. El bobinado que recibe la energía se denomina primario y el que la entrega secundario.

El transformador ideal, matemático o perfecto es aquel en el cual no hay pérdidas, y el mismo flujo magnético ϕ atraviesa los bobinados de primario y de secundario.

Se tiene entonces

$V_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt}; \quad V_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt}$, y dividiendo una ecuación por otra:

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = n$, donde n se conoce como **relación de transformación**.



Dado que no hay pérdidas, la potencia recibida en primario y la entregada por el secundario han de ser iguales:

$V_1 I_1 = V_2 I_2$ y entonces $\frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1} = n$

En función del valor de la relación de transformación tenemos transformador reductor(n>1) con tensión de secundario menor que en primario, transformador elevador(n<1) con tensión de secundario mayor que en primario, y transformador separador(n=1) con tensiones de primario y secundario iguales.

Podemos determinar la resistencia de primario en función de la de secundario:

$$R_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{nV_2}{I_2 / n} = n^2 \frac{V_2}{I_2} = n^2 R_2$$

observando que el transformador realiza una transformación de resitencias entre los circuitos de primario y secundario.